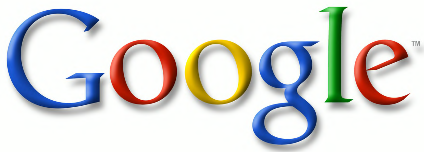


VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

DERDE REEKS.

NEGENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1892.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

NEGENDE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Vrijdag 24 April 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, KAMERLINGH ONNES, A. C. OUDEMANS JR., VAN BEMMELEN, SURINGAR, BAKHUIS ROOZEBOOM, MARTIN, HOFFMANN, MAC GILLAVRY, KORTEWEG, ENGELMANN, GRINWIS, KOSTER, PEKELHARING, VAN RIEMSDIJK, J. A. C. OUDEMANS, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, MOLL, SCHOUTE, LORENTZ, PLACE, FORSTER, STOKVIS, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, VAN 'T HOFF, VAN DER WAALS en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. C. J. GONNET, Archivaris van de Rijks-Archieven in Noord-Holland te Haarlem, 14 April 1891; 2°. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 15 April 1891; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Bibliothecaris van Teyler's Stichting te Haarlem, 16 April 1891; 4°. H. DE BUSSY, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, 13 April 1891; 5°. I. E. A. MARTIN, Secretaris van het Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde te Jena, 1 April 1891; 6°. den Directeur van de Bibliothèque de l'Université royale de Lund, 1891; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1⁰. G. C. W. BOHNENSIEG, Bibliothecaris van Teyler's Stichting te Haarlem, 1891; 2⁰. I. TIOSCHI, Secretaris van het R. Istituti di Studi superiori e di perfezionamento te Florence, 17 Februari 1891; 3⁰. A. C. DROLSUM, Bibliothecaris van de Université royale de Norvège te Christiania, 10 Augustus 1890; 4⁰. G. STORM, Secretaris van het Videnskabs-Selskabet te Christiania, 30 Augustus 1890; 5⁰. M. BARCENA, Directeur van het Observatoire météorologique central te Mexico, 21 Maart 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1⁰. brieven van verontschuldiging over het niet bijwonen van de vergadering, van de Heeren MICHAËLIS en BEHRENS;

2⁰. brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (17 Maart 1891), waarin wordt medegedeeld, dat het H.M. de Koningin-Regentes behaagd heeft, de benoemingen van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en VAN DER WAALS, respectievelijk tot voorzitter en ondervoorzitter der Afdeeling, goed te keuren;

3⁰. brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (10 April 1891), waarin wordt medegedeeld, dat het H.M. de Koningin-Regentes behaagd heeft, over het jaar 1891 opnieuw beschikbaar te stellen eene som van ƒ 500, tot het houden van aanteekeningen van geologischen aard bij grondboringen en doorsnijdingen van den bodem van Nederland. — Van dit besluit werd bereids kennis gegeven aan de geologische Commissie.

— De Heer ENGELMANN leest, ook uit naam der Heeren LORENTZ en VAN DER WAALS, het in de Duitsche taal geschreven adres van gelukwensching, bestemd voor den hoogleeraar HERMANN VON HELMHOLTZ, bij gelegenheid van het bereiken van den 70-jarigen leeftijd op 30 Augustus a. s. — Het adres wordt, onder dankzegging, met acclamatie goedgekeurd.

— De Heer VAN DER WAALS spreekt over de »formule der Electrolytische dissociatie". Bij de berekening van de grootte der drukking boven zoutoplossingen is het noodig te kennen den graad van ontleding der opgeloste molekulen; met andere woorden, het gedeelte der molekulen, dat in ïonen gesplitst is. De formule, die ter bepaling van dat gedeelte door OSTWALD gegeven is, is afgeleid zonder rekening te houden met mogelijken invloed, uitgaande van het oplosmiddel.

Het was den spreker gebleken, dat die onderstelling niet alleen geheel willekeurig was, maar ook onjuist. Geleid door beginselen, die ten grondslag liggen aan zijne theorie voor mengsels, was het hem mogelijk gebleken de wijziging na te gaan, die de formule van OSTWALD ondergaat als men den invloed, door het oplosmiddel uitgeoefend, niet reeds vooraf buitensluit. — Deze wijziging geeft 1° rekenschap van het feit, dat vereeniging van ïonen, opgelost in water, met warmte-absorptie gepaard kan gaan; 2° dat de graad van splitsing voor hetzelfde molekuul, maar opgelost in verschillende media, zeer verschillend kan zijn en 3° dat, bij toenemenden concentratiegraad van de opgeloste stof, de hoeveelheid gesplitste molekulen een maximumwaarde bezitten kan — iets wat kan bijdragen tot de verklaring der maximumgeleidbaarheid, die electrolyten bij zekeren concentratiegraad vertoonen.

— De Heer BIERENS DE HAAN biedt voor de Verslagen en Mededeelingen aan: Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden. N°. XXXII.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden, door den Heer STOKVIS, uit naam van den Heer J. SASSE Az., diens dissertatie over Zeeusche schedels, en door den Heer BIERENS DE HAAN eene door hem geschreven historische brochure.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de voorzitter de vergadering.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXXII. Proeve eener bibliographie van de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden.

Toen ik op verzoek van den Heer G. Eneström te Stockholm voor zijne belangrijke Bibliotheca Mathematica op mij nam voor ons land een bibliographie zamen te stellen voor de geschiedenis der zuivere wiskunde — zooals hij die ook voor andere landen opnam — besloot ik dezen arbeid uit te breiden tot de wis- en natuurkundige wetenschappen in het algemeen. Met deze uitbreiding behoorde dus te worden opgenomen:

a. Werken over de geschiedenis.

b. Levensberichten der personen, die genoemde wetenschappen beoefenden.

c. Strijdschriften.

d. Uitgaven van oude schrijvers, zooals Euclides, enz.

e. Verzamelwerken over eenig onderwerp, wetenschappelijke woordenboeken, enz.

Wat de rangschikking betreft, deze konde geregeld zijn of naar de genoemde onderwerpen, of naar de schrijvers,

of naar de tijdrekenkundige orde. De laatste rangschikking is hier verkozen, omdat zij naar ik meende, het beste overzicht gaf op het materiaal. Voor ieder jaar zijn evenwel de werken gerangschikt naar de namen der schrijvers, omdat hier dikwerf de chronologische orde moeilijk te handhaven was: eene uitzondering hierop is er gemaakt, wanneer het een pennestrijd betreft. Ten einde tevens de levensbeschrijvingen beter te kunnen overzien, is eene alfabetische lijst toegevoegd, waarbij de werken door hun volgnummer worden aangeduid.

Daar nu de volgende lijst eene eerste proeve is, twijfel ik niet, of er zullen nog vele werken ontbreken, die hier eigenlijk tehuis behoorden. Gaarne hoop ik, indien mij daarbij hulp mocht verleend worden, deze lijst naderhand aan te vullen.

1. J. J. Scaliger J. C. Fil., M. Manilii Astronomicon. Libri V. Lutet. M. Patissonius, 1579. (XII), 292, (12) blz. 8°.

2. J. J. Scaliger J. C. F., Epistola de Vetustate et Splendore Gentis Scaligerae et Jul. Caes. Scaligeri Vita. Lugd. Bat., Off. Plantin., 1594. (XII), 193 blz., 1 portr. 4°.

3. D. Baudius, Or. in funere J. J. Scaligeri. 1608. 4°.

4. D. Heinsius, Hercules tuam fidem, sive Munsterus Hypobolimaeus, id est Satira Mennippea de Vita, Origine et Moribus Gasparis Scioppi Franc. Edit. 2a. Acc. Tabulae Burdoniae Confutatio. Lugd. Bat., J. Pechius, 1608. 412 blz. 8°.

5. D. Heinsius, Orationes in Obitum J. J. Scaligeri J. C. à Burden fil. Lugd. Bat., Lud. Elzevirius, 1609. 98, 23 blz. 8°.

6. F. van Schooten (vader), De propositien van de 15 Boecken der Elementen Euclidis met verklaringen. Leijd., 1617. 12°.

7. G. Jacchaeus, Or. in obitum Willebrordi Snellii, 4 Nov. 1626. Lugd. Bat., J. Maire, 1626. 22, (10) blz. 4°.

8. C. van Nienrode, De vijfthien Boecken Euclidis. Mits-

gaders het Fundament der Surdische en Binomische Getallen. En Aenhangh. Uytr., [1630?]. IV, 232 blz. 8⁰.

9. J. Wz. Verroten, Euclides zes Eerste Boekke vande Beginselen der Wiskonsten. Aenhangh van de Duytsche Spraek. Hamb., V. Gaubrich, 1633. (XVI), 344 blz. 4⁰.

10. M. Winsemius, Or. Funebris in Obitum Adr. Metii. Franeq., H. Balck, 1635. 64 blz. 4⁰.

11. P. Winsemius, In Obitum Adriani Metii Epicedion. Franeq., H. Balck, 1636. 18 blz. 4⁰.

Naar aanleiding van: J. Jansz. Stampioen, Algebra ofte Nieuwe Stel-Regel. 's Hage, 1639. in 4⁰, ontstond de volgende pennestrijd (Nos 12—21). Vergelijk N⁰. 453.

12. J. a Wassenaer, Aen-merckinge op de Nieuwe Stel-Reghel. Leyd., J. Maire, 1639. 59 blz. 4⁰.

13. J. Jansz. Stampioen, Dagh-Vaerd-Brief. 20 Oct. 1639. 4 blz. 4⁰.

14. J. Jansz. Stampioen, Tweede Dagh-Vaerd-Brief gezonden aen den student van Padua, anders genaemt Jacob a Wassenaer. 4 Nov. 1639. 4 blz. 4⁰.

15. J. a Wassenaer, Antwoord op den Dagh-Vaerd-Brief van Jan Stampioen de Jonge. 1639. (5) pp. 4⁰.

16. J. Jansz. Stampioen, Derde-Daghvaerd-Brief gezonden aen Jacob van Wassenaer (ofte aen zijn meester R. des Cartes). 1639. 4⁰.

17. J. à Wassenaer, Tijdraming. 's Hage, 1640. 4⁰.

18. J. Jansz. Stampioen, Verclaringe over het Gevoelen bij de E. H. Professoren Matheseos der Universiteyt tot Leyden uytgesproken. 's Gravenh., 1640. 28 blz. 4⁰.

19. J. Jansz. Stampioen, Openbaringe der valsche practycken ghepleeght door J[acob] a W[assenaer]. 1640. 4⁰

20. J. Jansz. Stampioen, Brief aen den const-lievenden Lezer. 1640. 4 blz. 4⁰.

21. J. à Wassenaer, Den On-Wissen Wis-Konstenaer J. J. Stampioenius ontdeckt. Leyd.. J. Maire, 1640. 88 blz. 4⁰.

Over het werk: C. H. Gietermaker, 't Vergulde Licht der

Zeevaert. Amst., 1660. 4°, ontstond de volgende pennestrijd (N[os] 22 en 23).

22. P. Karseboom, Tegen Gietermaker, Verguld Licht der Zeevaert. 1660.

23. C. H. Gietermaker, Wederlegginge over 'tgeen Pieter Karseboom aanwijst. Amst., 1661. 20 blz. 4°.

24. C. van Leeuwen, Bril voor de Belachelijke Amsterdamsche Geometristen. Amst., H. Doncker, 1663. 79 blz. 4°.

Naar aanleiding van dit werk ontstond de volgende pennestrijd (N[os] 25—28). Vergelijk N°. 404 en N[os] 426 en 432.

25. A. de Graaf, Ontleding van de Bril voor de Amsterdamse Belachelijke Geometristen. Met een Bijvoegsel, zijnde een Brief aan Dirk Rembrantsz van Nierop. Amst., 1663. IV, 59 blz. 4°.

26. C. H. Gietermaker, Den Amsterdamschen Belachelijcken Geometrischen Bril-Maker Cornelis van Leeuwen voorgestelt. Amst., 1663. 16 blz. 4°.

27. A. C. Hellingwerf, Over C. van Leeuwen, Bril voor de Amsterdamse belagchelijke Geometristen. Amst., 1663. 4°.

28. C. van Leeuwen, Antwoort tegen het Lasterboeckjen van C. H. Gietermaker. Amst., H. Doncker, 1663. 12 blz. 4°.

29. S. Tennulius, Elegia in Obitum Francisci Scoteni, defuncti 4 Cal. Jun. 1660. Daventr., 1667. 4°.

30. S. Tennulius, J. Camerarii Explicatio in Nicomachi Geraseni Libros ad Scientiam Numerorum. Cum Notis in Arithmeticam Jamblichi. Daventr., 1667. 4°.

31. S. Tennulius, Notae in Librum Quartum Jamblichi Chalcidensis et de Arithmetica Nicomachi Introductione. Daventr., W. Wier, 1667. 239 blz. 4°.

32. S. Tennulius, Jamblichus Chalcidensis in Nicomachi Geraseni Arithmeticam Introductionem, et de Fato. Arnh., J. F. Hagius, 1668. (XIII), 176 blz. 4°.

33. D. de Hollander, Oogen-Salve voor den in Konststicksienden Italiaenschen Boeckhoudens Spiegel-maker B. H. Geestevelt. Amst., C. Goedesbergh, 1669. (124) blz. 4°.

34. D. DE HOLLANDER, Toetsteen van d'Algebra Spetiosa alwaer door Adrianus Twilt getoetst wordt de 57e Questie van Ludolf van Ceulen Boeck des Circkels. Als mede twee Brieven van L. van Ceulen. Amst., id., 1669. IV, 52 blz. 4°.

35. D. DE HOLLANDER, Den on-wissen Italiaenschen Boekhouder B. H. G[eestevelt] ontdeckt. Amst., 1669. 8°.

36. C. MELDER, Euclidis Elementorum VI Priores Libri. Lugd. Bat. et Amst., D. A. & A. à Gaesbeeck, 1673. VIII, 306 blz. 12°.

37. Compendium Euclidis Curiosi. Dat is Meetkonstigh Passer-Werck, hoe men met een gegeven opening van een Passer en een Liniaal, de werck-stucken van Euclidis ontbinden kan. Amst., J. Janssonius van Waesbergen, 1673. 24 blz., 1 pl. 4°.

38. F. VAN SCHOOTEN (vader), De 15 Boecken der Elementen van Euclidis. Met korte verklaringen eeniger Propositien. Vergroot door J[acob] v[an] L[eest] met het sesthiende Boeck van Christophoro Clavio. Amst., J. van Leest, 1667. (VIII), 242 blz. 12°.

39. C. Jsz. VOOGHT, Euclidis Beginselen der Meetkonst, vervaat in 15 Boecken, waarbij 't 16 Boek Fr. Flussatis Candallae. Amst., J. van Keulen, 1695. (XXIV), 672 blz. 4°.

40. FR. CUPERUS, Christelijk Jubeljaar. 1700.

Over deze preek ontstond de volgende pennestrijd (Nos 41—44).

41. M. VAN NISPEN, Over het Begin der 18e Eeuwe. Dordr., 1700. 8°.

42. F. HALMA, Brief aan den Heere Mattheus van Nispen, waar in het Verschil over 't eijnde der 17de en 't begin der 18de Eeuw nader ter toetse komt. Amst., J. van Oosterwijk, 1700. 92 blz. 4°.

43. J. BAGELAER, Aanmerkingen op den Brief van F. Halma aan M. v. Nispen, over het begin der 18de eewe. Amst., P. Sceperus, 1700. 40 blz. 4°.

44. P. JENS, Onderzoek der bewijzen van N. Halma wegens het Geschil der Nieuwe Eeuw. 's Grav., M. Uytwerf, 1700. 16 blz. 4°.

45. G. van Broekhuizen, 't Leven van den Heer Descartes. Amst., W. de Coup, 1700. XVI, 440 blz. 8°.

46. P. Warius, De zes eerste, elfde en twaalfde Boeken Euclidis. Toegift. Aanhang. Amst., J. Loots, 1704. (XII), 292, (2) blz., 28 pl. 8°.
Herdrukken: 2e. ib., id., 1717. 8°.
3e. ib., Wed. J. Loots en J. Swighters, 1735. 8°.
4e. ib., Joh. van Keulen en Zoonen, 1763. 8°.

47. B. de Volder, Or. qua sese laboribus academicis abdicavit. Lugd. Bat., Corn. Boutestein, 1705. 39 blz. 4°.

48. G. Coetier, Laudatio fun. Bernhardi Fullenii, Fran. F. Halma, 1708. 55 blz. 4°.

49. J. Gronovius, Laudatio Burcheri de Volder. Lugd. Batav., C. Boutestein, 1709. 44 blz. 4°.

50. P. le Clercq gezegd de la Pierre, Vita et opera ad Annum 1711. Amst., J. L de l'Orme., 1711. 264 blz , portr. 8°.

51. P. van Musschenbroek, Elementa Euclidea Geometriae Planae ac Solidae et Selecta ex Archimede Theoremata quibus accedit Trigometria. Auctore A. Tacquet. adorn. G. Whiston. Amst., P. de Coup, 1725. XXIV, 384 blz., 7 pl. 8°.

52. H. Venema, Or. fun. in memoriam Ruardi Andala. Fran., 1727. 55 blz. 4°.

53. Leven van Gerardus Mercator.
Levensb. Gel. Mann, VI, 1733. blz. 537—547.

54. S. H. van Lom, Euclidis Elementorum Libri VI priores Planorum ac XI et XII Solidorum. Amst., H. Vieroot, 1738. (31), LXXXVIII, 392 blz., 36 pl. 8°.

55. A. Schultens, Or. in memoriam Hermanni Boerhaavii. Lugd. Bat., Joh. Luzac, 1738. 106 blz. 4°.

56. A. Schultens, Akad. Redevoering ter gedachtenisse van den grooten Herman Boerhaave. Leijd., Joh. Luzac, 1739. 108 blz. 4°.

57. J. L. Stammetz, Groot en volledig Woordenboek der Wiskunde. Overzien door Willem de Bordus. Amst., C. G. J. Wishoff, 1740. 4°.

Herdruk: ib., J. W. Willemsz, 1772. (XVIII), 515 blz., 38 pl. 4°.

58. N. YPEY, Or. fun. in obitum Guilielmi Lorei. Fran., 1744. 44 blz. folio.

59. Elogium Josephi Scaligeri.
Misc. Gron., II, 1746. blz. 1.

60. C. G. KOENIG, Elements de Géométrie contenant les six premiers Livres d'Euclide. Mis dans un nouvel ordre. 1750?
Herdrukken: 2e. Augmentées des Livres 11 et 12. Par A. KUYPERS. La Haye, H. Scheurleer, 1758. X, (294) blz. 4°.
3e. Par J. J. BLASSIERE. La Haye, P. van Os, 1762. X, 392 blz. 4°.

61. S. KOENIG, Appel au public du jugement de l'Académie Royale de Berlin sur un fragment de lettre de M. Leibnitz, cité par Mr. Koenig. Leiden, 1752. 12°.

62. J. A. FAS, Intreerede over de heilzaame oogmerken van Prins Maurits van Nassau in het oprichten van het Leeraarsampt in de Nederduitsche Wiskunde in 's Lands Hoogeschool te Leyden. Leyd., S. en J. Luchtmans, 1763. IV, 28 blz. 4°.

63. Levensbericht wegens den Hoogleeraar J. H. van Lom.
Lett. Hist. en Boekbesch., II, 1763. blz. 899—903.

64. P. STEENSTRA, Grondbeginsels der Meetkunst of kort Begrip der zes eerste Boeken met het elfde en twaalfde van Euclides. Leyd., S. en J. Luchtmans, 1763. (XVI), 381 blz. 8°.
Herdrukken: 2e. ib., 1770. XXXII, 442 blz. 8°.
4e. ib., id., 1789. XLVI, 441 blz 8°.
5e. ib., 1797.—6e, ib., id., 1803.
7e. Door M. J. S. Bevel. ib., id., 1810.
8e. ib., id., 1822.
9e. ib., id., 1825. XXVIII, (8), 543 pp. 8°.

65. J. LULOFS, Brief aan Meyndert Semeyns. Leyd., Wed. A. Honkoop, 1764. 103 blz. 8°.

66. M. SEMEYNS, Merkwaardige Verzameling van echte stukken en brieven... tusschen Joh. Lulofs.... 's Gravenh., F. Bousquet en C°., 1764. 105 blz 4°.
Vergelijk N°. 348 en N°s 349, 368.

67. M. SEMEYNS, Brief aan Johan Lulofs. Enckh., W. Palensteyn Semeyns, 1764. 48 blz. 8°.

68. A. YPEY, Epistola ad Auctorem Notarum in Dissertationem de Igne, quae reperiuntur in Bibliotheca Scientiarum, Anni 1767. Franeq., N. Udink, 1768. 14 blz. 8°.

69. A. BRUGMANS, Elogium viri cel. Nicolai Engelhard. Gron., 1767. 16 blz. 8°.

70. J. TH. ROSSIJN, De Mathematicis Belgarum Ingeniis. Harderw., 1768. 4°.

71. N. YPEI, Commentarius de rebus gestis Memnonis Coehorni. Franeq., G. Coulon, 1771. 41 blz. 8°.

72. N. YPEY, Gedenkschrift van den grooten Menno Baron van Coehoorn. Fran., J. Ippinga, 1772. 62 blz. 8°.

73. A. BRUGMANS, Elogium Nic. Engelhard.
Pro Excol., 1, 1773. blz. 537—550.

74. H. Boerhaave.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1775. blz. 134.

75. N. Hartsoecker.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1775. blz. 174.

76. Het Leven van Christiaan Huigens.
Lev. van Ned. Mannen en Vrouwen, 1775. blz. 217.

77. B. Bekker.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1776. blz. 285.

78. J. Coccejus.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1777. blz. 35.

79. J. Golius.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1779. blz. 52.

80. Leven van K. Drebbel.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1779. blz. 74.

81. Het leven van M. Baron van Coehoorn.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1780. blz. 169.

82. A. B. STRABBE, Historie der Wiskunde van Montucla. Amst., 1782—1804. IV Dl. 8°.

83. Laurens Reael.
Lev. v. Ned. Mannen en Vrouwen, 1783. blz. 76.

84. L. J. DE PUYT, Grondbeginselen der Meetkunde, vervattende de zes eerste, het elfde en twaalfde Boek van Euclides. Leyden, Murray en Pluygers, 1784. XV, 595 blz., 28 pl. 8°.

85. C. TERNE, Over de spreuk van Boerhaave: Simplex veri sigillum.
Hand. Geneesk. Gen. Serv. Civ., IX, 1785. blz. 1.

86. L. C. SCHRÖDER, Levensbijzonderheden van Ant. Brugmans, Professor te Groningen.
Konst- en Letterb., 1789, II. blz. 42—45.

87. J. VAN NUYS KLINKENBERG, Or. Funebris in obitum Petri Curtenii. Amst., P. H. Dronsberg, 1790. IV, 46 blz. 4°.

88. Bijzonderheden betrekkelijk [Steven Hoogendijk] den stichter van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte te Rotterdam. Rott., 1790. 10 blz., portr. 4°.

89. J. W. VAN SONSBEEK en D. J. VAN LENNEP, Ter nagedachtenis van Pieter Nieuwland. Leyd., J. Meerburg, 1794. 45 blz. 8°.

90. S. J. BRUGMANS, Verslag wegens den Leydschen Hoogleeraar Pieter Nieuwland.
Konst- en Letterb., 1794, II. blz. 178.

91. J. H. VAN SWINDEN, Lijkrede op Pieter Nieuwland. Amst., P. den Hengst., 1795. VIII, 172 blz. 8°.

92. De lotgevallen en verdiensten van B. Bekker.
N. Alg. Mag., III, 1795. blz. 245.

93. J. DE GELDER, Geschied- en Wiskundige verhandeling over het verschil wegens het slot-jaar der XVIII Eeuw. 's Hage, J. J. Stuerman, 1800. 120 blz. 8°.

94. G. BRENDER à BRANDIS, Levensschets van B. J. Kasteleyn. Haarl., 1801. 8°.
Proeven, 1801. blz. 249.

95. Levensbericht wegens den Hoogleeraar J. H. van Lom. 1801. 8°.

96. J. H. VAN SWINDEN, Over de Meting van den Graad des Meridiaans in het begin der vorige eeuw, in China, door de Jesuiten verricht.
Konst- en Letterb., 1803, II. blz. 99—105.

97. J. SCHELTEMA, Het leven, de leer en lotgevallen van B. Bekker.
Vad. Letterk. Mengelw., 1804, II. blz. 49, 97, 145, 320.

98. J. H. VAN SWINDEN, Bestimmung des vom P. Thomas bei dessen chinesischer Gradmessung gebrauchten Maasses.
Monatl. Corr. von F. VON ZACH, 1804. blz. 502—531.

99. J. A. O. H., Het leven, de leer en lotgevallen van Balthasar Bekker, Nalezing. 1804. 78 blz. 8°.

100. Iets omtrent John Pell of Johannes Pellius, eerst hoogleeraar in de wiskunde te Amsterdam, daarna te Breda.
Schouwb. van in- en uitl. Letterk., 1805, I, V. blz. 89, 192.

101. M. VAN MARUM, Brief aan G. Hesseling. Haarl., 1806. 16 blz. 8°.

102. G. HESSELING, Hydrostatische Verhandeling behelzende Aanmerkingen op de Stelling: Vloeistoffen wegen in gelijksoortige Vloeistoffen. Met een Voorberigt ter beantwoording van de Aanmerkingen vervat in een Brief van den Heer M. van Marum. Amst., J. W. Yntema en C°., 1807. XXIV, 24 blz. 8°.
Naar aanleiding der stukken N°. 101 en 102 ontstond de volgende pennestrijd (Nos 103, 106—111, 113 en 115).

103. M. VAN MARUM, Brief aan H. Aeneae, Antikritiek. 1807. 4 blz. 8°.

104. J. MEERMAN, Eenige nadere bijzonderheden nopens J. Az. Leeghwater.
Konst- en Letterbode, 1807, I. blz. 276.

105. Iets nopens de laatste jaren van den Hoogleeraar Boerhave.
Konst- en Letterbode, 1807, II. blz. 425.

106. G. HESSELING, Recensie van twee Brieven. Amst., 1808. 8°.

107. H. AENEAE, Iets over de Waterweegkunde ter gelegenheid van het ontstaan geschil tusschen G. Hesseling en M. van Marum strekkende tot Anticritiek op de Recensie. Amst., Joh. v. d. Hey, 1808. 42 blz. 8°.

108. G. HESSELING, Antwoord op de Antikritiek van Aeneae. Amst., 1808. 8°.

109. A. VAN COPPENAAL, Iets over de waterweegkunde, vervat in eenen brief van den Heer H. Aeneae. Antwoord op de Antikritiek. 1808. 11 blz. 8°.

110. H. AENEAE, Korte Aanmerkingen op een naamloozen brief. 1808. 15 blz. 8°.

111. G. HESSELING, Iets rakende het geschil over de verklaring der proefneming van Boyle. Amst., 1808. 8°.

112. JER. DE BOSCH, Lofrede op J. R. Deiman. Haarl., 1808. 64 blz., portr. 8°.

113. J. DE KANTER PHILZ, Eenvoudige verklaring van de proef van Boyle. 1808. 8°.

114. C. EKAMA, Or. de Frisia, ingeniorum mathematicorum imprimis fertili. Leov., D. van der Sluis, 1809. 64 blz. 4°.

115. A. VAN LINDEN VAN DEN HEUVELL, Proefondervindelijke Verhandeling over de onlangs betwiste waterweegkundige stelling: water weegt in water. 's Hage, B. Scheurleer, 1810. 80 blz. 8°.

116. C. Drebbel, de uitvinder van het varen onder water.
Rec. d. Rec., 1810. blz. 822.

117. N. G. VAN KAMPEN, Beknopte Geschiedenis der Letteren en Wetenschappen in de Nederlanden tot op het begin der XIXe Eeuw. Haarl., 1811—1826. 3 Dln. 8°.

118. J. W. TE WATER, Levensberigt van wijlen den Hoogleeraar Jan Frederik van Beeck-Calkoen.
Konst- en Letterb., 1811, II. blz. 180—186.

119. R. KOOPMANS, Hulde aan Gerrit Hesselink. Amst., J. W. Yntema, 1812. 144 blz. 8°.

120. Levensschets van Gerrit Hesselink.
Konst- en Letterb., 1812, I. blz. 326—329.

121. J. H. VAN SWINDEN, Verhandeling over Huygens als uitvinder der slingeruurwerken. Met Bijlagen. Amst., 1813. 142 blz., 9 pl. 4°.
Ned. Inst. Verh. 1e kl., III. blz. 27.

122. Ter gedachtenisse van wijlen Jan Frederik van Beeck-Calkoen. Utrecht, J. F. van Terveen, 1813. 103 blz. 8°.
2e Druk. Utr., K. J. Gieben, 1846. 99 blz., portr. 8°.

123. Levensschets van Johan Frederik Hennert.
Konst- en Letterb., 1814. blz. 198—203, 207—222, 227—236.

124. J. P. VAN CAPPELLE, Bijdragen tot de geschiedenis der Natuurkunde bij de ouden. Haarlem, Fr. Bohn, 1815. IV, 152 blz. 8°.

125. J. SCHELTEMA, Verdiensten en lotgevallen van Laurens Reaal.
Mengelw., I, 1817. blz. 57.

126. J. VERBURG, Vita Ladislai Chernac. Groning., J. Oomkens, 1817. 12 blz. 4°.
Ann. Acad. Gron. 1816.

127. J. VERBURG, Levensberigt van den Hooggeleerden Heere Ladislaus Chernac.
Konst- en Letterb., 1817. blz. 212—217.

128. G. v. L[ENNEP], Notice sur Jean Blanken. 1818. 16 blz. 8°.

129. H. C. VAN DER BOON MESCH, In obitum viri nobilissimi, clarissimi, S. J. Brugmans. Lugd. Bat., Apud H. W. Hazenberg Jr., 1819. 16 blz. 8°.

130. H. HOEFKAMER, Or. fun. in obitum J. H. van Kinsbergen. Amst., 1819. 25 blz. 4°.

131. N. G. VAN KAMPEN, Levensschets van S. J. Brugmans.
Vad. Letteroef., 1819, II. blz. 737—753.

132. J. L. KESTELOOT, Lofrede op Hermanus Boerhaave. Leijden, D. du Mortier en Zoon, 1819. 84 blz. 8°.
2e Druk ib., id., 1825. 75 blz., portr. 8°.

133. J. SPEYERT VAN DER EYK, D. M. viri clar. Sebaldi Justini Brugmans. Lugd. Bat., Apud Vid. M. Cyfveer, J. Fil, 1819. 4 blz. 8°.

134. De stem der natuur bij het graf van den WelEd. Hooggel. Heer S. J. Brugmans. Leijden, Haak en Cie., 1819, 10 blz. 8°.

135. Bij het afsterven van den WelEd. Hooggel. Heer S. J. Brugmans. Te Leyd., bij H. W. Hazenberg Jr, 1819. 12 blz. 8°.

136. M. LEMANS, Levensbeschrijving van Christiaan Huygens. Amst., 1820. 20 blz. 8°.

137. A. VAN BEEK, Christiaan Huygens, uitvinder der slingeruurwerken.
Konst- en Letterb., 1821, II. blz. 131.

138. J. P. VAN CAPPELLE, Bijdragen tot de geschiedenis der wetenschappen en letteren in Nederland. Amst., Joh. v. d. Hey, 1821. VI, 298 blz., 7 portr. 8°.

139. J. G. de Crane, Or. de Vossiorum Juniorumque Familia. Gron., J. Oomkens, 1821. 89 blz. 4⁰.

140. J. Scheltema, Levensschets van Jan van der Bildt. 1821. 8⁰.
Mengelw., III. blz. 225.

141. J. Kappeyne van de Coppello, Prolusio scholastica in Memoriam viri doct. Abrahami van Bemmelen. Hagae Com., Vid. Allart, 1822. 14 blz. 8⁰.

142. P. J. Uylenbroek, Specimen geographico-historicum exhibens Dissertationem de Ibn Haukalo Geographo. Lugd. Bat., S. et J. Luchtmans, 1822. LXX, 83, 84, 128 blz. 4⁰.

143. P. J. Uylenbroek, Or. de Astronomiae conditione apud Arabos. ib., id., 1822. 16 blz. 4⁰.

144 J. Brouwer, Hulde aan de nagedachtenis van den hoogberoemden heere J. H. van Swinden.
Vad. Letteroef., 1823, II. blz. 249—255.

145. M. Lemans, Lijkrede op J. H. van Swinden. 1823. 31 blz. 8⁰.

146. Schets eener beschrijving van het leven en de geschriften van Jean Henri van Swinden. Amst., P. den Hengst en Zoon, 1823. 16 blz. 8⁰.

147. A. Blanken Jsz., Memorie ter verschuldigde opheldering aan zijne Land- en Stadgenooten, vrienden en bloedverwanten. 's Grav., 1824. 8⁰.

148. H. Baron Collot d'Escury, Hollands Roem in Kunsten en Wetenschappen. Met Aanhangsel en Bijlagen. 's Grav. en Amst., 1824—1844. VIII Dl. in 8⁰.

149. H. Baron Collot d'Escury, Register op Dl. I—IV.
(Van 't voorg. werk). Ib., 1833. 8⁰.

150. G. Moll, Redevoering over Jan Hendrik van Swinden. Amst., Pieper en Ipenbuur, 1824. 79 blz. 8⁰.

151. A. C. Oudemans, S. J. Brugmans.
Jaarb. V. W., 1824. blz. 115.

152. C. W. Pape, Iets ter herinnering aan Jan Esdré. Hert., U. Palier en Zoon, 1824. 38 blz. 8⁰.

153. J. Roos Bzn., Pieter Nieuwland.
Jaarb. V. W., 1824. blz. 98—118.

154. Hulde aan de nagedachtenis van Jean Henri van Swinden. Amst., 1824. 122 blz., portr. 8°.

155. H. C. VAN DER BOON MESCH, Lofrede op Sebaldus Justinus Brugmans. Bekroonde verh. Leyd., D. du Mortier en Zoon, 1825. 163 blz. 8°.

156. A. CAPADOSE, Lofrede op Sebaldus Justinus Brugmans. Bekroonde verh. Leyd., D. du Mortier en Zoon, 1825. IV, 293 blz. 8°.

157. D. VAN COPPENAAL, Jean Henri van Swinden.
Jaarb. V. W., 1825. blz. 116—134.

158. C. EKAMA, Verh. over Gemma Frisius, den eersten Grondlegger tot het bepalen van de Lengte op zee.
Ned. Inst. Verh. 1e kl., VII, 1825. blz. 415.

159. J. KONING, Berigt wegens Joost Janszoon Beeldsnijder en de door hem vervaardigde stukken.
Ned. Inst. Verh. 2e kl., V, 1825. blz. 1.

160. J. G. W. MERKUS VAN GENDT, Memorie behelzende eenige der belangrijkste gebeurtenissen gedurende het leven van Menno, Baron van Coehoorn. 's Grav., A. Kloots en C°., 1825. VIII, 158 blz. 8°.
2e Dr. 's Hage, 1836. 8°.

161. A. C. OUDEMANS, S. J. Brugmans. Utr., 1825. 10 blz. 8°.

162. G. MOLL, Pierre Simon de Laplace. 1826. XII, 32 blz. 8°.
Bijdr. t. d. Nat. Wetensch., II, 1826. blz. 284—314.

163. D. VAN COPPENAAL, Hermanus Boerhaave.
Jaarb. V. W., 1826. blz. 111.

164. G. MOLL, Bijdragen tot de geschiedenis der wiskundige wetenschappen in Nederland. 1826. 56 blz. 8°.

165. H. ROOS BZN., Simon Stevin.
Jaarb. V. W., 1826. blz. 121—135.

166. F. W. CONRAD, Prijsverh. betreffende het leven en de verdiensten van Christiaan Brunings. Met een Voorberigt van J. H. van der Palm. 's Grav., Landsdr., 1827. LIII, 103 blz. 4°.

167. F. J. DOMELA NIEUWENHUIS, Comm. praemio ornata de Renati Cartesii Commercio cum philosophis

Belgicis. Lov., F. Michel, 1827. VIII, VI, 115 blz. 4°.

168. J. J. DE GELDER, Theonis Smyrnaei Platonici Expositio eorum quae in Arithmeticis ad Platonis lectionem utilia sunt. Lugd. Bat., S. et J. Luchtmans, 1827. XIV, LXXII, 194 blz. 8°.

169. G. MOLL, Verhandeling over de Spiegeltelescopen. Amst., 1827. 26 blz. 4°.

170. J. W. DE CRANE, De erkende wetenschappelijke verdiensten van Eise Eisinga. 1828. 25 blz. 8°.
Konst- en Letterb., 1828. blz. 152.

171. J. P. AREND, Verh. over Balthasar Bekker.
Vad. Letteroef., 1829. blz. 713.

172. J. VAN LEEUWEN, Iets over Menno van Coehoorn.
Konst- en Letterb., 1829, I. blz. 405.

173. W. VAN PEYMA, Levensberigten van Arjens Roelofs Roelofsz. Fran., G. Ypma, 1829. VIII, 159 blz. 8°.

174. R. S., Iets over Herman Boerhaave.
Fakkel, IV, 1829. blz. 76.

175. J. P. VAN CAPPELLE, Nagelaten bijdragen tot natuurkunde en geschiedenis, bijeenverzameld en uitgegeven door D. J. VAN LENNEP. Haarl., P. Loosjes, 1831. 287 blz. 8°.

176. G. MOLL, Geschiedkundig onderzoek naar de eerste uitvinders der verrekijkers. Zamengesteld uit de aanteekeningen van wijlen den Hoogleeraar van Swinden.
Ned. Instit., N. Verh. 1e kl., III, blz. 103—209.

177. [G. MOLL], On the alleged Decline of Science in England by a Foreigner. Lond., E. T. Bovrey, 1831. IV, 33 blz. 8°.

178. N. VAN WIJK, Het verblijf van Balthasar Bekker te Weesp in 1695.
Arch. v. Hist. Gesch., II, 1831. blz. 430.

179. G. A., Herinneringen aan mijn leermeester H. C. van der Boon Mesch. Eindh., 1831. 14 blz. 8°.

180. A. MEETER Pz., Levensbijzonderheden van Obe Sikkes Bangma.
Fr. Volks-Almanak, 1832. blz. 67—83.

181. M. SIEGENBEEK, Levensschets van H. C. van der Boon Mesch. 1832. 8 blz. 8°.
Konst- en Letterb., 1832, I. blz. 274.

182. J. T. L'ANGE, Berigt aangaande Mozes Leemans.
Konst- en Letterb., 1833, II. blz. 114.

183. CHRIST. HUGENII, aliorumque seculi XVII Exercitationes Mathematicae. Ed. P. J. Uylenbroek. Hagae Com., 1833. II Vol. 4°.

184. Leven van Jan Huygen van Linschoten.
Wijngaardranken, Haarlem, 1833, I. blz. 23.

185. R. LOBATTO, Iets over Johan Pieter Bourjé.
Konst- en Letterb., 1834. blz. 179—184, 195—199, 210—212.

186. Necrologie van Ulrich Huguenin.
Milit. Spect., 1834. blz. 204.

187. J. W. DE CRANE en W. EEKHOFF, Levenschets van Willem Loré. Fran., G. Ypma, 1835. 86 blz. 8°.

188. J. DE KANTER PHILZ. en J. AB UTRECHT DRESSELHUIS, Oorspronkelijke stukken betreffende de uitvinding der verrekijkers binnen de stad Middelburg. Middelb., 1835. 8°.

189. Levensschets van Mr. Jan ter Pelkwijk.
Konst- en Letterb., 1835, II. blz. 338.

190. Levensberigt van J. ter Pelkwijk. Zwolle, J. J. Tijl, 1835. 89 blz. 8°.

191. J. G. W. MERKUS VAN GENDT, Schets betreffende Coehoorn.
Milit. Spect., 1836, IV. blz. 8.

192. Levensschets van Mozes Lemans.
Jaarb. v. Isr., 1836, II. blz. 297.

193. S. DE WIND, Bijdrage over J. A. Leeghwater.
Vad. Letteroef., 1837, II. blz. 745.

194. W. J. C. VAN HASSELT, Is J. Asz. Leeghwater schrijver van de korte beschrijving van Haarlem?
Konst- en Letterb., 1838, II. blz. 53.

195. N. G. VAN KAMPEN, Levens van beroemde Nederlanders sedert het midden der zestiende Eeuw. Uit echte stukken opgemaakt. Haarl., Fr. Bohn, II Dln. 1838, 1840. 8°.

196. R. van Rees, Berigt aangaande het leven en de wetenschappelijke verdiensten van G. Moll.
Konst- en Letterb., 1838. II. blz. 83—100.

197. R. van Rees, Levensberigt van Gerrit Moll. 1839. 8°.
Utr. Stud. Alman., 1839. blz. 104.

198. De uitvinding der Verrekijkers.
Konst- en Letterb., 1839. blz. 347, 430.

199. C. R. Hermans, Levensberigt van Jan Esdré.
Geschiedk. Mengelwerk, I, 1840. blz. 273—280.

200. U. G. Lauts, Over het geslacht Langeranus of van Langren.
Konst- en Letterb., 1840. I. blz. 158.

201. G. D. J. Schotel, Abel, Karel, Adriaan, Matthaeus, Maria van Nispen.
Jaarb. Dordr., 1840. blz. 12.

202. P. J. Uylenbroek, Or. de Fratribus Christiano atque Constantino Hugenio, artis dioptricae cultoribus. Hagae Com., 1840. 54 blz. 4°.

203. L. G. Visscher, Oratio de Gerardo Moll. Hagae Com., 1840. 40 blz. 4°.

204. A. Wassenbergh, Iets over Menno Baron van Coehoorn.
Fr. Volks Alman., 1840. blz. 104.

205. J. W. de Crane, Bauke Eisma van der Bildt. 1841.
Verzam., 1841. blz. 75, 103.

206. W. Eekhoff, Beschouwing van Balthasar Bekker als mensch.
Vad. Letteroef., II. 1841. blz. 53.

207. H. W. Tydeman, Eigene Levensschets van wijlen den luitenant-generaal Baron Krayenhoff.
Rec. der Rec., XXXIV, 1841, I. blz. 45.

208. P. O. C. Vorsselman de Heer, Levensberigt van Professor Alex. Charl. Guill. Suerman. Utr., N. van der Monde, 1841. 8°.
Utr. Stud. Alman., 1841. blz. 123.

209. F. van der Breggen Cz., De Inwijdings-Rede van Herman Boerhaave. Amst., J. Muller, 1842. 54 blz., portr. 8°.

210. G. J. Mulder, Redevoering over P. O. C. Vorsselman de Heer. Utr., Scheltop, 1842. 35 blz. 8°.

211. J. C. DE JONGE, Over Hendrik Ruse.
Instit., III, 1843. blz. 75.

212. U. G. LAUTS, Dirk Rembrantsz van Nierop.
Ber. v. Zeevaartk., 1843, III. blz. 330—340.

213. G. J. MULDER, Levensbericht van W. Wenckebach.
Utr. Stud. Alm., 1843. blz. 3.

214. J. SWART, Iets over Abraham Cornelis Hazewinkel van Veendam.
Ber. v. Zeevaartk., 1844, IV. blz. 322—336.

215. B. W. A. E. SLOET TOT OLDHUIS, Levensschets van P. O. C. Vorsselman de Heer. Dev., J. de Lange, 1843. 208 blz., portr. 8°.

216. Reael, de gouverneur-generaal van Nederlandsch-Indië.
Tijdschr. Ned. Ind., V, 2, 1843. blz. 439.

217. J. J. DODT VAN FLENSBURG, Letterkundige Aanteekeningen aangaande de twist tusschen Sim. van der Eycke, Ludolf van Ceulen en Adriaan Anthonisz, over de Leer van den Cirkel. 1844. 16 blz. 8°.

218. H. W. TYDEMAN, [Eigene] levensbijzonderheden van wijlen den Luitenant-Generaal Baron C. T. Kraijenhoff. Nijm., C. A. Vieweg, 1844. 8°. XVIII, 538 blz., portr. 8°.

219. J. T. BODEL NYENHUIS, Over de Nederlandsche Landmeters en Kaartgraveurs, Floris Balthasar en zijne drie Zonen, onbekend aan de Levensbeschrijvers.
Instit., V, 1845. blz. 316—367.

220. J. S. VAN COEVORDEN, Iets over den Nederlandschen sterrekundige J. M. Mohr te Batavia.
Tijdschr. Ned. Ind., VII, 1845. blz. 270.

221. J. VAN DER HOEVEN, Levensschets van P. J. Uylenbroek.
Konst- en Letterb., 1845, I. blz. 18, 34.

222. J. C. DE JONGE, Nog iets over Hendrik Ruse.
Instit., V, 1845. blz. 142—161.

223. F. KAISER, Iets over de kijkers van Christiaan en Constantijn Huygens.
Instit., VI, 1845. blz. 194.

224. G. LAUTS, Jan Huigen van Linschoten, Nederlandsch reiziger, 1563—1611.
Ber. Zeevaartk., 1845, V. blz. 259.

225. P. MELVILL VAN CARNBEE, Iets over den Nederlandschen sterrekundige J. M. Mohr te Batavia.
Tijdschr. Ned. Ind., VII, 1845. blz. 172.

226. C. G. C. REINWARDT, Over den boom van Boerhave.
Instit. V, 1845. blz. 118.

227. J. J. DODT VAN FLENSBURG, Letterkundig Verslag van hetgeen uit de Landspapieren kan worden geput, om daarna de verdiensten van P. Plancius omtrent zeevaart kunde te doen waarderen.
Ber. Zeevaartk., 1845, V. blz. 77; 1846, VI. blz. 69.

228. W. J. C. RAMMELMAN ELZEVIER, Over Mr. Ludolf van Ceulen, als schermmeester en hoogleeraar in de wiskunde te Leyden.
Hist. Gen. Utr., Kron., Dl. 2, 1846. blz. 351—359.

229. H. J. ROOYAARDS, Levensberigt van Joh. Fred. Lud. Schröder.
Utr. Stud. Alm., 1846. blz. 1.

230. P. L. RIJKE, Or. In. de meritis Petri Johannis Uylenbroek. Lugd. Bat., 1846. 29 blz. 8°.

231. G. J. VERDAM, Geschiedkundige Aanteekening betreffende de algemeene oplossing van derde magts-vergelijkingen. Amst., 1846. 16 blz. 8°.

232. J. DE VRIES, Nog iets over Hendrik Ruse.
Instit., VI, 1846. blz. 88.

233. De Zeilwagen van Simon Stevin.
Eendragt, I, 1846. blz. 70.

234. Levensberigt van Prof. P. J. Uylenbroek.
Leidsche Stud. Alm., 1848. blz. 114.

235. J. J. DODT VAN FLENSBURG, Geboorte- en sterfjaar van den Hoogleeraar Willebrord Snellius.
Hist. Gen. Utr., Kron., III. 1847. blz. 14.

236. J. J. DODT, Simon Stevin.
Alg. Letterk. Maandschr., 1847, blz. 313—316.

237. J. J. DODT, Jan Jansz. Blaeu.
Alg. Letterk. Maandschr. 1847. II. blz. 369.

238. J. VAN LEEUWEN, Hulde aan Eise Eisinga.
Vr. Fries, V, 1847. blz. 36—48.

239. A. S. RUEB, Ter nagedachtenis van W. Wenckebach. Utr., v. d. Post Jr., 1847. 32 blz. 8°.

240. J. J. TEDING VAN BERKHOUT, Over het geboortejaar van den Nederlandschen wiskundige Willebrord Snellius.
Konst- en Letterb., 1847. blz. 4.

241. DE V., Willem Simon Swart.
Konst- en Letterb., 1847. blz. 20.

242. Over H. Coetsius, als schrijver over het maken van zonnewijzers in 1689.
Hist. Gen. Utr., Kron., 1847. blz. 34.

243. Schoone daad van wijlen den Maarschalk van Kinsbergen.
Rec. der Rec., 1847. blz. 214.

244. F. W. CONRAD, Over de verdiensten van Nicolaas Cruquius in het anno 1726 aanraden tot het opmaken eener algemeene waterstaatkundige statistiek van ons land.
Inst. v. Ingen., Notulen, 1848. blz. 112.

245. J. C. DE JONGE, Levensbeschrijving van Hendrik Ruse.
Mil. Spect., 1848. blz. 71.

246. DE MEESTER, Over Simon Stevin, David Orliens, Mr. Adriaan Anthonissen, Jan Adriaansz. Leeghwater, ingenieur, en Johan Scorel, schilder.
Hist. Gen. Utr., Kron., 1848. blz. 137, 138.

247. G. J. VERDAM, het leven van den Hoogleeraar Jacob de Gelder.
Konst- en Letterb., 1848. II. blz. 307.

248. G. J. VERDAM, Leven van den Hoogleeraar J. de Gelder. Haarlem, 1848. 86 blz. 8°.

249. [E. J. DIEST LORGION], Balthasar Bekker in Franeker. Groningen, H. R. Roelfsema, 1848. 264 blz. 8°.

250. Notice biographique sur Antonius Lipkens. La Haye, L. Löwenberg, 1848. 20 blz. 8°.

251. J. A. OUDEMANS, Levensberigt van Prof. J. de Gelder.
Leid. Stud. Alm., 1849. blz. 110—117.

252. J. M. E. DERCKSEN, Levensschets van Johannes Florentius Martinet.
Geld. Volks-Alm., 1850. blz. 36.

253. E. J. DIEST LORGNION, Enkele bijzonderheden aangaande de familie van Balthasar Bekker.
Gron. Volks-Alm., 1851. blz. 90.

254. W. R. VAN HOËVELL, Laurens Reaal, en zijne verdiensten als dichter beschouwd.
Tijdschr. Ned. Ind., XI, 1851. blz. 103.

255. J. DE WAL, De deensche veldoverste Hendrik Ruse, een geboren Drenthenaar.
Drent. Volks-Alm., 1851. blz. 96—110.

256. P. MR., Nog iets over Laurens Reael.
Tijdschr. Ned. Ind., XI, 1851. blz. 203.

257. Uitvinding der Verrekijkers door Zacharias Jansen te Middelburg.
Hist. Gen. Utr., Kron., 1851. blz. 194.

258. Simon Stevin en zijn geslacht.
Nav., I, 1851. blz. 365; II, 1852. blz. 43, 165.

259. H. BRADE, Monument voor J. C. Pilaar. Amst., 1852. 8°.

260. W. A. ENSCHEDÉ, de Johanne Bernouillio, eximio mathematico. Lugd. Bat., 1852. 30 blz. 4°.

261. W. O. GEELHOED, De Gebroeders Chr. en Const. Huygens en von Humboldt.
Rec. der Rec., 1852. blz 105—123.

262. A. MEETER Pz., Levensbijzonderheden van Obe Sikkes Bangma.
Fr. Volks-Alm., 1852. blz. 67.

263. Jan Jsz. Blaeu, zijne geboorteplaats.
Nav., II, 1852. blz. 35.

264. Over Joost Jansz, landmeter-beeldsnijder en steenhouwer in 1587.
Hist. Gen. Utr., Kron., 1852. blz. 310.

265. P. HARTING en C. J. MATTHES, Verslag over den vermoedelijken uitvinder van het mikroskoop, niet Cornelis Drebbel, maar Hans en Zacharias Jansen.
Versl. Kon. Akad. d. Wet. Nat. I, 1853. blz. 64.

266. Leeghwater als duiker.
Nav., II, blz. 36; Bijbl., 1853. blz. 26.

267. A. WASSENBERGH, Beroemde Friesche wiskundigen.
N. Fr. Volks-Alman., 1854. blz. 76—96.

268. Iets over Zacharias Jansen.
Nav., Bijbl., 1854. blz. 42, 90.

269. P. M. BRUTEL DE LA RIVIÈRE, Jan Carel Pilaar, zijn leven en zijne werken geschetst.
Zeeland, 1855 blz. 269—307.

270. Levensberigt van A. S. Rueb.
Alb. der Nat., 1855. blz. 1—7.

271. J. G. W. MERKUS VAN GENDT, Levensschets van Menno Baron van Coehoorn in verband met de voornaamste gebeurtenissen van zijn tijd.
Milit. Spect., 1856, I blz. 35.

272. G. H. M. D[ELPRAT], Levensberigt van Dr. Seerp Brouwer.
Konst- en Letterb., 1856. blz. 308—310, 315, 316.

273. Jan Henrich Jarichs van der Ley, wis- en zeevaartkundige.
Nav., V, blz. 40; Bijbl., 1856. blz. 64, 143.

274. Leven van Cornelis Jan Glavimans.
Konst- en Letterb., 1856. blz. 274.

275. W. VROLIK, Levensberigt van Cornelis Jan Glavimans.
Jaarb. Kon. Akad., 1857. blz. 55.

276. A. WALRAVEN, Petrus Hondius.
Cadsandria, 1857. blz. 156.

277. Johannes George Arbon. 1786—1857. Amst. 1857. 8°.

278. Gedenksteen voor Constantijn en Christiaan Huygens.
Konst- en Letterb., 1857. blz. 243.

279. Leven van B. Bomme.
Konst- en Letterb. 1858. blz. 385.

280. P. HARTING, De twee gewigtigste Nederlandsche uitvindingen op natuurkundig gebied.
Alb. d. Nat., 1859. blz. 323, 355.

281. J. G. W. MERKUS VAN GENDT, Iets over de watermolens van J. A. Leeghwater.
Mil. Spect., 1859. blz. 300.

282. H. A. EVERTSZ, Friesche wiskundigen.
N. Fr. Volks-Alman., 1860. blz. 3—16.

283. A. A. FOKKER, Philippus Lansbergen en zijne zonen Pieter en Jacob. Bijdrage tot hun leven.
Arch. Zeeuwsch Gen., V. 1860. blz. 52—100.

284. P. HARTING, Een gedenkteeken voor Christiaan Huygens.
Alb. d. Nat., 1860. blz. 55.

285. J. van Lennep, Levensschets van de gebroeders J. en C. Blaeu.
Holland, 1860. blz. 1.

286. J. van Lennep, Over Laurens Jacobsz Reael.
Holland, 1860. blz. 22.

287. J. H. van Lennep, Klok van Christiaan Huygens.
Konst- en Letterb., 1860. blz. 5.

288. J. Pan, Iets over Jan Olphert Vaillant, kapitein ter zee, 1747—1800.
Ber. Zeevaartk., 1860, II. blz. 131—142.

289. J. W. van Sypesteyn, Het leven van Menno Baron van Coehoorn, beschreven door zijn zoon Gosewijn Theodoor Baron van Coehoorn. Leeuw., G. T. N. Suringar, 1860. XVIII, 236 blz. 8°.

290. A. C. Duker, School-Gezag en Eigen-Onderzoek. Historisch-kritisch studie van den strijd tusschen Voetius en Descartes. Leid., D. Noothoven van Goor, 1861. VIII, 231 blz. 8°.

291. S. F. Klijnsma, Biographisch Woordenboek. Levensberichten van Wis-, Natuur- en Sterrekundigen. Amst., Weytingh en Brave, 1861. I. (en eenigste) Dl. IV, 120 blz. 8°.

292. W. J. Knoop, Coehoorn.
De Gids, 1861. I. blz. 39.

293. D. Bierens de Haan, Iets over Logarithmentafels.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Nat., 1e Reeks, Dl. XIV, 1862. blz. 15—94.

294. J. van Vloten, Spinoza en Descartes.
Dageraad, 1862, XIV. blz. 5.

295. Coehoorn.
N. Mil. Spect., 1862. blz. 27, 81, 225, 345.

296. P. Scheltema, Joost Janszoon, beeldsnijder en landmeter.
Amstels Oudh., V, 1863. blz. 195.

297. Gedenkteeken voor Constantijn en Christiaan Huygens.
Meded. Haag. Vereen., I, 1863. blz. 18.

298. F. W. Conrad, Levensberigt van L J. A. van der Kun.
Jaarb. Kon. Akad., 1864. blz. 91.

299. J. C. Eyssel, Levensberigt van Leopold Johannes

Antonius van der Kun. 's Hage, 1864. 33 blz., portr. 8°.

300. W. J. KNOOP, Coehoorn.
Krijgsk. Geschr., IV, 1864. blz. 313.

301. G. C. B. SURINGAR, Invloed der Cartesiaansche wijsbegeerte op het natuur- en geneeskundig onderwijs aan de Leidsche Hoogeschool.
Tijdschr. Geneesk., 1864. blz. 153.

302. E. VAN DER VEN, Verslag betreffende een Nederduitsch Handschrift van reken- en meetkundigen inhoud van Samuel Carolus Kechelius. Leid., 1864. 8 blz. 8°.

303. J. DE WAL, Cartesius' uiteinde.
Letterk. Meded., 1864. blz. 138.

304. J. J. F. WAP, Eise Jeltes Eisinga en zijn volledig bewegelijk hemels-gestel te Franeker. 's Grav., 1864. 4 blz. 8°.

305. Geslacht Blaeu.
Nav., 1864. blz. 153.

306. Iets over den Nederlandschen sterrekundige Johan Maurits Mohr te Batavia.
N. Bijdr. Taalk. enz. v. Ned. Ind., VII, 1864. blz. 160.

307. J. T. BODEL NYENHUIS, De Leidsche Medicinae Doctor Conradus Zumbag de Koesvelt.
Letterk. Meded., 1865. blz. 41—59,

308. D. BIERENS DE HAAN, Nekrologie van G. J. Verdam.
Ned. Spect., 1866. blz. 379.

309. C. P. BURGER, Nekrologie van Rehuel Lobatto.
Ned. Spect., 1866. blz. 66.

310. D. VAN KETWICH, J. Swart, 1796—1866.
Ber. Zeevaartk., XXVI, 1866. blz. 113—120.

311. C. J. MATTHES, Levensberigt van Rehuel Lobatto.
Jaarb. Kon. Akad., 1866. blz. 25—40.

312. C. J. MATTHES, Levensberigt van Gideon Jan Verdam.
Jaarb. Kon. Akad., 1866. blz. 56—69.

313. C. PRUYS VAN DER HOEVEN, Sebald Justinus Brugmans.
Alb. der Nat., 1866. blz. 240.

314. G. C. B. SURINGAR, Verval van het klinisch onderwijs na den dood van Boerhaave. Adriaan van Royen

als hoogleeraar in de kruid- en geneeskunde. Waardering van Gaubius en Fredrik Winter. Pieter van Musschenbroek als hoogleeraar in de physica.
Ned. Tijdschr. Geneesk., 1866. II. blz. 256.

315, Necrologie van Jacob Swart.
Ned. Spect., 1866. blz. 155.

316 Jacob Swart.
Nieuwsbl. Boekh., 1866. N'. 21.

317. Hulde aan de nagedachtenis van Professor G. J. Verdam.
Vox Stud., 1866, III. blz. 59.

318. W. Eekhoff, Lucas Oling.
Nav., 1867. blz. 167.

319. P. Harting, Christiaan Huygens in zijn leven en werken geschetst.
Alb. der Nat., 1867. blz. 33.
Ook afzonderlijk uitgegeven. Gron., 1867. 77 blz., 1 portr. 8°.

320. P. Harting, Oude optische werktuigen toegeschreven aan Zacharias Janssen en een beroemde lens van Chr. Huygens teruggevonden.
Alb. der Nat., 1867. blz. 252.

321. P. Harting, De tien-voets-kijker van Christiaan Huygens hersteld.
Alb. der Nat., 1867. blz. 313.

322. C. J. Matthes, Levensberigt van J. G. S. van Breda.
Jaarb. Kon. Akad., 1867. blz. 22—33.

323. P. Harting, F. Kaiser et J. Bosscha, Rapport à l'Académie Royale des Sciences. Amst., 1868. 24 blz. 8°.
Over de ondergeschoven briefwisseling tusschen Chr. Huygens en Galilei, gegeven door Chasles in het Fransche Instituut.

324. H. P. M. van der Horn van den Bosch, J. B. van Helmont, een scheikundige uit het begin der XVIIe eeuw, 1577—1641.
Alb. der Nat., 1868. blz. 353, 385.

325. Jhr. F. A. Ridder van Rappard, Ernst Brinck. Utr., Kemink en Zoon, 1868. 93 blz. 8°.

326. A. van Toorenenbergen, Dr. Bernard Nieuwentijd in de lijst zijns tijds.
Stemmen voor Waarh. en Vrede, 1868. blz. 436—466.

327. G. A. Vorsterman van Oyen, Notice sur Ludolphe van Colen.
Bull. di Bibl., 1868. blz. 141—156.

328. A. M., Herman Boerhaave [31 December 1668—23 September 1738]. Schiedam, 1868. 8 blz. 8⁰.

329. J. van der Baan. Philippus en Petrus Lansbergen.
Arch. Zeeuwsch Gen., VII, 1869. blz. 202—227.

330. P. Harting, Christiaan Huygens in de Parijsche Akademie van Wetenschappen.
Alb. der Nat., 1869. blz. 16.

331. A. van der Linde, Balthasar Bekker. Bibliographie. 's Gravenhage, M. Nijhoff, 1869. 57 blz. 8⁰.

332. K. D. Schönfeld, Cartesius als wiskundige. Gron., J. Oppenheim, 1869. 50 blz. 8⁰.

333. G. A. Vorsterman van Oyen, Eine historische Bemerkung.
Schlömilch Zeitschr. für Mathem., XIV, 1869. blz. 22—25.

334. De zeilwagen van Stevin.
Oude Tijd, 1869. blz. 297, 388.

335. J. Douwes, De wijsgeer J. F. L. Schröder. Gron., J. B. Wolters, 1870. XVI, 275 blz. 8⁰.

336. J. G. W. Fijnje, Levensberigt van Frederik Willem Conrad en eene bijdrage tot de geschiedenis van den waterstaat van zijn tijd.
Inst. van Ingen., 1870. blz. 123—305.

337. C. J. Matthes, Levensberigt van J. W. Ermerins.
Jaarb. Kon. Akad., 1870. blz. 79.

338. J. W. L. van Oordt, Levensberigt van F. W. Conrad.
Jaarb. Kon. Akad., 1870. blz. 67.

339. J. H. Philipse, Levensberigt van J. W. Ermerins.
Letterk. Levensber., 1870. blz. 341.

340. G. A. Vorsterman van Oyen, Quelques arpendeurs hollandais de la fin du XVIᵉ et du commencement du XVIIᵉ siècle, et leurs instruments.
Bull. di Bibl., 1870. blz. 323—376.

341. Necrologie van G. Simons.
Tijdsch. Nijverh., 1870. blz. 180.

342. A. Vrolik, Dr. G. Simons. 's Grav., 1870. 52 blz. 8⁰.

343. Levensberigt van J. Badon Ghijben.
Milit. Spect., 1870. blz. 231—240.

344. P. J. H. Baudet, Leven en werken van Willem Jansz. Blaeu. Utr., C. van der Post Jr., 1871. 180 blz., portr. 8°.

345. J. P. Delprat, Levensbericht van D. J. Storm Buysing.
Jaarb. Kon. Akad., 1871. blz. 57—62.

346. Frederik Willem Conrad.
Mannen van Beteek., II, 1871. blz. 201.

347. P. J. H. Baudet, Naschrift op: Leven en werken van W. Jz. Blaeu. Utr., C. van der Post Jr., 1872. 31 blz. 8°.

348. D. Bierens de Haan, Notice sur M. Semeyns.
Bull. di Bibl., 1872. blz. 21.

349. D. Bierens de Haan, Een Leidsch hoogleeraar J. Lulofs en een Enkhuizer natuurkundige M. Semeyns.
Alb. der Nat., 1872. blz. 242.

350. J. A. Boogaard, Toespraak bij de plechtige onthulling van het standbeeld van Boerhaave.
Ned. Tijdschr. Geneesk., 1872, I. blz. 353—367.

351. P. van Geer, Frederik Kaiser, Een woord van herinnering. Leid., A. W. Sijthoff, 1872. 30 blz. 8°.

352. J. de Jong, F. Kaiser. 1872.
Mann. u. Beteek., VII, blz 137—159, portr., pl.

353. J. A. C. Oudemans, Chronologische Tafel der werken van F. Kaiser. 1872. 14 blz. 8°.

354. H. G. van de Sande Bakhuyzen, F. Kaiser. Necrologie.
Ned. Spect., 1872. blz. 265.

355. J. P. Amersfoordt, Een oud plan van doorgraving van Holland op zijn smalst. [J. P. Dou, J. Dou, J. Jansz Dou].
Inst. Ing. Verh., 1873. blz. 42—48.

356. J. P. Amersfoordt, Bijdrage tot de levensbeschrijving van Jan Pietersz. Dou, zijn zoon Johannes, zijn kleinzoon J. Johannesz., alle drie landmeters van Rijnland.
Inst. Ingen. Verh., 1873. blz. 48—68. 2 krt.

357. P. J. H. Baudet, Ronde ghebulte Pas-caerten. [W. Jz. Blaeu].
Ned. Spect., 1873. blz. 26.

358. D. Bierens de Haan, Oratio Rectoralis [de F. Kaiser]. Lugd. Bat., P. Engels, 1873. 8°.

359. D. Bierens de Haan, Notice sur des tables logarithmiques hollandaises.
Bull. di Bibl., 1873. blz. 203—238.

360. D. Bierens de Haan, Iets over twee verdienstelijke Nederlanders, A. Vlacq en E. de Decker.
Alb. d. Nat., 1873. blz. 158—160.

361. D. Bierens de Haan, On Ludolph van Ceulen's 35 decimal value of π and on some of his works.
Messenger of Mathem., VI, 1873. blz. 24—26.

362. W. B. S. Boeles, A. Metius. Bibliographie.
Bibl. Advers., I, 1873. blz. 229—232.

363. P. van Geer, De Leidsche Sterrewacht en haar stichter [F. Kaiser].
Vad. Letter., 1873. blz. 541.

364. A. C. de Graaf, Nog iets over twee verdienstelijke Nederlanders A. Vlacq en E. de Decker.
Alb. der Nat., 1873. blz. 251—256.

365. P. Harting, Twee verdienstelijke Nederlanders, A. Vlacq en E. de Decker door een Engelschman herdacht.
Alb. d. Nat., 1873. blz. 115—119.

366. C. J. Matthes, Levensberigt van J. Badon Ghijben.
Jaarb. Kon. Akad., 1873. blz. 21—29.

367. J. A. C. Oudemans, Levensschets van Prof. Kaiser. Batavia, 1873. 44 blz. 8°.

368. D. Bierens de Haan, Notice sur quelques Quadrateurs du cercle dans les Pays-Bas.
Bull. di Bibl., 1874. blz. 99—140.

369. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen I. Overbrenging der Briggiaansche logarithmen op het vaste land door Nederlanders. Adriaan Vlack en Ezechiel de Decker.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. VIII, 1874. blz. 57—81.

370. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen II. Meindert Semeyns.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. VIII, 1874. blz. 82—97.

371. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen III. Adriaan Vlack en zijne Logarithmentafels.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. VIII, 1874. blz. 163—199.

372. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen IV. Proeven eener lijst van Hollandsche Logarithmentafels.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks. Dl. VIII, 1874. blz. 200—203.

373. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen V. Voorlooper der stereotyp-uitgaaf van Logarithmentafels.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. VIII, 1874. blz. 204—223.

374. C. H. D. Buys Ballot, Levensschets van M. Hoek. 1874. 8°.

375. F. W. van Eeden, Nekrologie van Dr. A. H. van der Boon Mesch.
Tijdschr. Nijverheid, XXXVII. blz. 370—374.

376. P. J. H. Baudet, Notice sur la part prise par Willem Jansz. Blaeu [1561—1638] dans la détermination des longitudes terrestres. Utr., 1875. 19 blz., pl. 8°.

377. P. J. H. Baudet, Notice sur les cartes en bosse du seizième siècle. Utr., 1875. 20 blz. 8°.

378. D. Bierens de Haan, Iets over de quadratuur van Simon van Eycke en hare gevolgen.
N. Arch. voor Wiskunde, I, 1875. blz. 70—86, 206—211.

379. D. Bierens de Haan, Tweede ontwerp eener Naamlijst van Logarithmentafels.
Kon. Akad. Amst. Verh., XV, 1875. 35 blz.

380. J. A. C. Oudemans, Levensbericht van F. Kaiser.
Jaarb. Kon. Akad., 1875. blz. 39.

381. Dr. A. Vrolik, Levensschets van Dr. A. H. van der Boon Mesch. Leid., E. J. Brill, 1875. 34 blz. 8°.

382. J. P. Amersfoordt, Jan Pieterzoon Dou.
Tijdschr. Aardr. Gen., I, 1876. blz. 90—98.

383. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen VI. De Logarithmen van Adolph Frederik Marci. Het Gezelschap der Konst-rekenaars in Hamburg.
K. Akad, Amst. Versl. en Med. Natuurk 2e Reeks, Dl. IX, 1876. blz. 1—40.

384. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen VII. Simon van der Eycke.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. IX, 1876. blz. 90—112.

385. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen VIII. Ludolph van Ceulen.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks. Dl. IX, 1876. blz. 322—370.

386. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen IX. W. Snellius, Ph. Lansbergen, Christ. Huygens over Ludolf van Ceulen.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks. Dl. X, 1876. blz. 161—179.

387. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen X. Cornelis van Nienrode.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. X, 1876. blz. 180—185.

388. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XI. De Logarithmen van Dirk Rembrandtsz van Nierop, J. Wolfram, W. O. Reitz, K. K. Reitz en D. Klinkenberg.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. X, 1876. blz. 186—206.

389. C. H. D. Buys Ballot, Levensschets van Dr. Rijk van Rees.
Utr. Stud. Alm., 1876. blz. 185—212.

390. C. H. C. Grinwis, Het leven van den Hoogleeraar R. van Rees. Utr., 1876. 54 blz. 8°.

391. J. de Jong, Frederik Kaiser. 1876. 60 blz. 8°.

392. Nekrologie van Dr. A. H. van der Boon Mesch.
Tijdschr. Nijverh., XXXVII, 1876. blz. 370.

393. D. Bierens de Haan, Iets over den tweede-machtswortel uit eene vierledige wortelgrootheid.
N. Arch. Wisk., III, 1877. blz. 208—210.

394. J. P. N. Land, J. F. L. Schröder en zijne wijsbegeerte.
Gids, 1877, III. blz. 1.

395. D. Lubach, Boerhaave als natuuronderzoeker.
Alb. der Nat., 1877. blz. 1.

396. J. Nanning a Uitterdijk, Jan Adriaansen Leeghwater te Kampen. 1647.
Bijdr. Gesch. Overijssel, IV, 1877. blz. 87.

397. H. P. Snelleman Cz., Johannes Goedaert. Middelburgsche wiskundige en schilder.
Alb. der Nat., 1877. blz. 203.

398. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XII. Adriaan Anthonisz.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 1—35.

399. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XIII. Handschrift van Franciscus van Schooten.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 36—61.

400. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XIV. Josephus Scaliger, J. C. Fil, als cirkel-quadrator.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 62—96.

401. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XV. Adriaan van Roomen.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 97—108.

402. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XVI. Jacob Marcelis, Daniel Waeywel en Gelis Bovy.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 109—117.

403. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XVII. Twee brieven van Ludolf van Ceulen.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 118—126.

404. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen. Nalezingen op N°. I—XVII.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 127—142.

405. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen. Lijst van beschreven of aangehaalde boeken.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XII, 1878. blz. 143—160.

406. D. Bierens de Haan, Notice sur un pamphlet mathématique hollandais intitulé; »Bril voor de Amsterdamsche belachelijke geometristen. Amsterdam, 1663".
Bull. di Bibl., 1878. blz. 383—452.

407. P. HARTING, Nogmaals Christiaan Huygens.
Alb. der Nat., 1878. blz. 308.

408. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XVIII. Martinus Carolus Creszfeldt.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XIV, 1879. blz. 180—187.

409. G. VAN DIESEN, Levensbericht van Dr. L. Cohen Stuart.
Jaarb. Kon. Akad., 1879. blz. 39.

410. C. J. MATTHES, Feestrede ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van het wiskundig Genootschap: Een onvermoeide Arbeid komt alles te boven. Amst., Weytingh en Brave, 1879. 31 blz. 8°.

411. P. L. RIJKE, Levensbericht van Willem Jacob 'sGravesande.
Alb. der Nat., 1879. blz. 65—88.

412. H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Nekrologie, Volkert Simon Maarten van der Willigen. 1879. 14 blz. 8°. en portr.

413. P. J. H. BAUDET, Willem Jansz. Blaeu, le géographe. Part prise par lui dans la détermination des longitudes terrestres.
Flandre, XI, 1880. blz. 206.

414. H. L. BOERSMA, Hans Vredeman de Vries en diens Naamgenooten.
Bouwk. Bijdr., XXVI, 1880. blz. 23—53.

415. M. TREUB, I. Ingen-housz. 1880. 23 blz. 8°.
Alb. d. Nat., 1880. blz. 3.

416. Dr. Isaac Paul Delprat.
Mil. Spect., 1880. blz. 349.

417. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XIX. Eerste gebruik der isohypsen door nederlandsche ingenieurs. N. S. Cruquius, M. Bolstra.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XVI, 1881. blz. 1—27.

418. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XX. Voorlooper der zeekaarten. De zeekaarten van Willem Jansz. Blaeu.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XVI, 1881. blz. 28—44

419. L. K. H. BRUMUND, Boerhaave's beschouwingen over eenige hoofdstukken der algemeene Pathologie. Delft, W. Beets, 1881. 67 blz. 8°.

420. P. VAN GEER, Johannes Bernouilli, en zijn strijd over het beginsel der levendige krachten. [1881]. 17 blz. 8°.

421. P. VAN GEER, Jean Henri van Swinden. Schets van zijn leven en werken.
Alb. d. Nat., 1881. blz. 3—25, portr.

422. G. C. NIJHOFF, Schets van het leven en de physiologie van Herman Boerhaave. Amst., D. Noothoven van Goor, 1881. 102 blz. 8°.

423. D. BIERENS DE HAAN, Levensschets van Isaac Paul Delprat.
Jaarb. Kon. Akad., 1881. blz. 14—42.

424. D. BIERENS DE HAAN, Levensschets van Carel Johannes Matthes.
Jaarb. Kon. Akad., 1882. blz. 1—14.

425. D. VAN LANKEREN MATTHES, Carel Johan Matthes. Haarlem, 1882. 8 blz., portr. 8°.

426. W. H. LOGEMAN, Petrus van Musschenbroek. Een Levensschets.
Alb. d. Nat., 1882. blz. 33—45, portr.

427. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXI. Cornelis Sackersz. van Leeuwen, Abraham de Graaf.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XVIII, 1883. blz. 218—276.

428. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXII. Jan Hendrick Jarichs van der Ley.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks. Dl. XVIII, 1883. blz. 277—301.

429. D. BIERENS DE HAAN, Bibliographie Néerlandaise Historique Scientifique des ouvrages importants, dont les auteurs sont nés au 16e, 17e et 18e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques, avec leurs applications.
Bull. di Bibl., Rome, 1883. 424 blz. 4°.

430. P. VAN GEER, Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius.
Arch. Neerland., 1883. blz. 453—470.

431. P. HARTING, Johannes Florentius Martinet.
Alb. der Nat., 1883. blz. 1.

432. J. P. DE BORDES, W. C. HOJEL en F. J. VAN DEN BERG, Het leven en de werken van J. P. Delprat. Delft, 1883. 57 blz., portr. 4°.

433. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXIII. Cornelis Sackers van Leeuwen. Claes Heyndericksz Gietermaker. Christiaan Martinii Anhaltin.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XIX, 1884. blz. 1—38.

434. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXIV. Twee zeldzame werken van Benedictus Spinoza.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XIX, 1884. blz. 78—84.
Herdruk: Benedictus de Spinoza. »Stelkonstige Reeckening van den Regenboog" and »Reeckening van kanssen" two nearly unknown treatises. Reimpression. By Dr. Bierens de Haan. Leid., 1884. 20, 3 blz. 4°.

435. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXV. De Thiende. Simon Stevin's werken.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XIX, 1884. blz. 249—295.

436. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXVI. De spiegeling der Singconst van Simon Stevin.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XX, 1884. blz. 107—200.

437. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXVII. Van de Molens door Simon Stevin; en over een ander werk van hem.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XX, 1884. blz. 197.
Van beide Nos 436 en 437 Herdruk: Simon Stevin, »vande Spiegeling der Singconst" et »vande Molens". Deux Traités inédits. Réimpression. Par Dr. D. Bierens de Haan. Amst., 1884. 130 blz. 4°.

438. D. BIERENS DE HAAN, Twee zeldzame werken van Benedictus Spinoza.
N. Arch. voor Wisk., XI, 1884. blz. 49—82.

439. D. BIERENS DE HAAN, Een uiterst zeldzaam werk

van Albert Girard: Invention Nouvelle en l'Algebre.
N. Arch. voor Wisk., XI, 1884. blz. 83—152.
Herdruk: Albert Girard, Invention nouvelle en l'Algebre. Réimpression par Dr. D. Bierens de Haan L.L.D. Leid.. Frères Muré. 1884. 72 blz. 4°,

440. F. DE BOER, De wiskunde der Indiërs. Brill, Leiden. 1884. 20 blz. 8°.

441. P. VAN GEER, Levensbericht van Willebrordus Snellius.
Alb. der Nat., 1884. blz. 1—17.

442. P. VAN GEER, Het geboortejaar van Willebrordus Snellius.
Alb. der Nat., 1884. blz. 121—124.

443. W. DE LANGE, Boerhaave's Elementa Chemiae. Rott., Gebr. Bazendijk, 1884. 73 blz. 8°.

444. J. A. C. OUDEMANS, Het Problema van Snellius opgelost door Ptolemaeus.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XIX, 1884. blz. 436.

445. J. A. C. OUDEMANS, Over het vermogen van den 10 voets kijker van Huygens.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 2e Reeks, Dl. XX, 1884. blz. 290.

446. A. J. SERVAAS VAN ROOYEN, Een mededinger van Christiaan Huygens [Simon Douw].
Alb. der Nat., 1884. blz. 25—31.

447. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXVIII. Iets over Dominicus Justus Bothnia van Burmania.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 3e Reeks, Dl. I, 1885. blz. 224—233.

448. D. BIERENS DE HAAN, Bouwstoffen XXIX. Wetenschappelijke inventaris van R. des Cartes.
K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 3e Reeks, Dl. I, 1885. blz. 234—244.

449. (D. BIERENS DE HAAN), Nécrologie de E. H. von Baumhauer.
Arch. Neerl., 1885. 4 blz.

450. J. G. Frederiks, De uitvinding der verrekijkers te Middelburg.
Tijdspiegel, 1885. blz. 168—188.
Zie het tegenschrift N°. 466.

451. H. P. M. van der Horn van den Bos, Jan Rudolph Deiman.
Alb. der Nat., 1886. blz. 3.

452. D. Lubach, In memoriam P. Harting.
Alb. der Nat., 1886. blz 81.

453. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XXX. Jan Jansz. Stampioen en Jacob a Wassenaer.
K. Akad. Amst Versl. en Med. Natuurk. 3e Reeks. Dl. III, 1887. blz 69—119.

454. D. Bierens de Haan, Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantijn Huygens.
Schlömilch Zeitschr. für Mathem., XXXII, Hist. Abth. 1887. blz. 161—173.

455. C. H. D. Buys Ballot, Levensbericht van Pieter Harting.
Maatsch. v. Letterk., Levensb., 1887. blz. 109.

456. P. H. van Dorsten, Inleiding op eene geschiedenis van de leer der Kegelsneden in de oudheid. Rotterdam, Eeltjes. 1887. 39 blz. 4°.

457. Mr. Ch. M. Dozy, Willem Jansz. Blaeu.
Aardrijksk. Gen., 1887, III. blz. 246.

458. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen. Nalezingen op N°. I—XVII. blz. 63—67.

459. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen. Nalezingen op N°. XVIII—XXX. blz. 68—78.

460. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen. Korte Levensberichten. blz. 79—81.

461. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen. Lijst der aangehaalde of beschreven boeken. blz. 82—96.
Nos 458—461. K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 3e Reeks, Dl. IV, 1888.

462. J. Bosscha, Martinus van Marum.
Alb. der Nat., 1888. blz. 1—20, portr.

463. Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. Tome I—III.

La Haye, Mart. Nijhoff, 1888—1890. in 4°, met platen.

Tome I. Correspondance 1638—1656. XIV, 622 blz.
» II. Correspondance 1657—1659. 639 blz.
» III. Correspondance 1660—1661. 593 blz.

Tome IV zal de Correspondance van 1662—1663 bevatten.

464. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen XXXI. Eenige brieven van Constantijn Huygens, den vader, aan Pater Marin Mersenne.

K. Akad. Amst. Versl. en Med. Natuurk. 3e Reeks, Dl. VI, 1889. blz. 102.

465. J. A. Cramer, Abraham Heidanus en zijn Cartesianisme. Utr., J. v. Druten, 1889. 202 blz., portr. 8°.

466. Dr. H. Japikse, Het aandeel van Zacharias Jansen in de uitvinding der verrekijkers. Uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen. Middelburg, J. C. en W. Altorffer, 1890. 19 blz. 8°.

Is gericht tegen N°. 450.

LIJST DER LEVENSBESCHRIJVINGEN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 30 Mei 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, FORSTER, VAN 'T HOFF, A. C. OUDEMANS JR., KORTEWEG, BIERENS DE HAAN, VAN DER WAALS, STOKVIS, J. A. C. OUDEMANS, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, SCHOLS, ENGELMANN, RAUWENHOFF, MOLL, KAPTEIJN, LORENTZ, BAKHUIS ROOZEBOOM, MAC GILLAVRY, SCHOUTE, MICHAËLIS, MARTIN, VAN BEMMELEN, SURINGAR, MULDER, ZEEMAN, PLACE en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden: 1°. C. KERBERT, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: Natura Artis Magistra te Amsterdam, 2 Mei 1891; 2°. J. A. WIJNNE, Bibliothecaris van het historisch Genootschap te Utrecht, 1890; 3°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1891; 4°. A. G. VORDERMAN te Batavia, 1891; 5°. A. W. P. VERKERK PISTORIUS te Buitenzorg, 27 April 1891; 6°. M. TREUB, Directeur van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, 23 Maart 1891; 7°. P. J. VAN BENEDEN te Leuven, 27 Mei 1891;

8°. F. Czermak, Secretaris van het naturforschende Verein te Brunn, 24 Maart 1891; 9°. G. Cocconi, Secretaris van de R. Accademia delle Scienze dell' Istituto te Bologna, September 1890; 10°. E. Lindemann, Bibliothecaris van de Nicolai-Hauptsternwarte te Pulkowa, 1890; 11°. J. G. Hagen, Directeur van het Georgetown College Observatory te Washington, 1891; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden: 1°. G. van der Mensbrugghe te Gent, 23 Mei 1891; 2°. A. Tielemann, Bibliothecaris van de Université Catholique te Leuven, 20 Januari 1891; 3°. Helmert, Directeur van het Centralbureau der internationalen Erdmessung te Berlin, April 1891; 4°. A. Lorenzen, Secretaris van het naturwissenschaftliche Verein für Schleswig-Holstein te Kiel, 1 Mei 1891; 5°. Hensinger, Secretaris van de Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften te Marburg, Februari 1891; 6°. E. Betti, Directeur van de R. Scuola normale superiore te Pisa, 12 Januari 1891; 7°. A. Woodward, Bibliothecaris van het American Museum of natural History te New-York, 26 Januari 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1° een brief van den Heer van Diesen, waarin hij zich verontschuldigt over het niet bijwonen van de vergadering;

2° eene missive, waarin, uit naam van H.M. de Koningin-Regentes, dank wordt gezegd voor het H.M. aangeboden Jaarverslag der Akademie over 1890;

3° een opstel van het lid der Akademie van den Berg, luidende: »Over Newton's benaderingsleerwijze voor de oplossing van vergelijkingen", bestemd voor de Verslagen en Mededeelingen;

4° een brief van Dr. J. Mijers, leeraar aan de H. B. S. te Hoorn, ter begeleiding van een opstel, luidende: »Een onderzoek op chloorkalk", 'twelk hij in de werken der Akademie wenscht opgenomen te zien. Tot rapporteurs over

dien arbeid worden aangewezen de Heeren VAN BEMMELEN en MULDER;

5⁰ eene circulaire, waarin het overlijden bericht wordt van den Hoogleeraar O. FEISTMANTEL, lid der Boheemsche Akademie van Wetenschappen;

6⁰ een in het italiaansch gestelde prijsvraag over middelen ter redding uit brandende gebouwen en tot voorkoming van brand.

— De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM spreekt over »de oplosbaarheid van isomorfe mengsels". Brengt men twee zouten met een oplosmiddel in aanraking dan verkrijgt men somtijds bij overmaat der beide zouten eene oplossing van bepaalde samenstelling (bij standvastige p en T). In het geval dat de beide zouten een dubbelzout kunnen vormen of isomorf zijn, kan daarentegen de oplossing velerlei samenstelling erlangen. Dit feit scheen in tegenspraak met een regel, door GIBBS afgeleid, over het verband tusschen het aantal coëxisteerende phasen en het aantal stoffen daarin vervat. Voor zouten, die een dubbelzout vormen, heeft spreker vroeger aangetoond, dat het juiste inzicht verkregen wordt door het dubbelzout als een enkele phase op te vatten. De samenstelling der oplossing is dan slechts bepaald, indien behalve het dubbelzout nog een zijner componenten in vasten toestand in overmaat aanwezig is.

Bij isomorfe zouten is echter de samenstelling der oplossing ook nog afhankelijk van de grootte van de overmaat der beide zouten in vasten toestand. DUHEM heeft in 1886 gemeend dit feit te verklaren, door aan te nemen dat voor isomorfe zouten gelijkheid van potentiaal bestond in vasten en opgelosten staat, tusschen moleculaire hoeveelheden der beide zouten. Toetst men echter de gevolgtrekkingen, hieruit afgeleid, aan de eigenschappen van isomorfe zouten dan blijkt dat de gestelde voorwaarde in het algemeen niet vervuld is.

Vat men echter met RETGERS de kristallen, die zich uit oplossingen van isomorfe zouten afzetten, op als volkomen homogeene mengsels of »vaste oplossingen" dan laat zich

met behulp van den potentiaal afleiden, dat bij standvastige p en T met een bepaalde mengverhouding a der beide bestanddeelen in de vaste oplossing, overeenkomen zullen bepaalde waarden voor de concentraties C_1 en C_2 der beide bestanddeelen in de oplossing.

Het verband tusschen a en C_1 en C_2 zou voor verdunde oplossingen gevonden kunnen worden op eene wijze, analoog aan die, waarop PLANCK onlangs eene betrekking afleidde tusschen de mengverhouding van twee stoffen in vloeibaren en in gasvormigen staat. Door mogelijke ionisatie der zouten in de oplossing, stuit men hierbij echter op moeielijkheden. Beschouwt men echter slechts den algemeenen gang van de betrekking zooals die vooral door KONOWALOW gevonden is tusschen de mengverhoudingen van twee stoffen in eene vloeibare en eene gasvormige phase — dan laat zich door analogie daaruit een en ander afleiden omtrent de gevallen die zich bij de oplosbaarheid van isomorfe mengsels zullen voordoen.

Voor het geval dat mengkristallen in alle verhoudingen mogelijk zijn volgt daaruit, dat bij verdamping eener oplossing bij constante temperatuur drieërlei mogelijk is: 1° dat de samenstelling der oplossing zich met die der kristallen geleidelijk wijzigt, tusschen 0 en 100 pCt. van het meest oplosbare bestanddeel, 2° dat die samenstelling zich beweegt naar eene verhouding waarbij $a = \frac{C_1}{C_2}$, 3° dat die samenstelling zich beweegt naar die van de oplossingen der enkele zouten naarmate $\frac{C_1}{C_2} \gtrless a$.

Voor het geval dat eene volledige mengingsreeks der kristallen niet bestaat, volgt uit de beschouwing dat de oplossing volkomen bepaalde samenstelling heeft zoodra beide soorten van grenskristallen daarin aanwezig zijn, en dat voorts weder 2 gevallen mogelijk zijn.

Somtijds zal de verhouding $\frac{C_1}{C_2}$ van de concentraties der genoemde oplossing gelegen zijn tusschen de verhoudingen a_1 en a_2 der grenskristallen en bij verdamping de oplossing

altijd tot die grenssamenstelling naderen. In andere gevallen kan $\frac{C_1}{C_2} > a_1 > a_2$ zijn, en blijft de oplossing alleen zoolang op de bepaalde samenstelling, totdat alle grenskristallen van de verhouding a_1 in die van de verhouding a_2 zijn omgezet.

Het voorlaatste geval heeft spreker aangetroffen bij een onderzoek omtrent de oplosbaarheid van $K\,Cl\,O_3$ en $Tl\,Cl\,O_3$ in water. Beide zouten zijn isomorf, doch van verschillenden habitus. Kristallen van het type $Tl\,Cl\,O_3$ zijn bij 10^0 bestaanbaar met eene bijmenging van $K\,Cl\,O_3$ tot 36.3 pCt.; kristallen van het type $K\,Cl\,O_3$ zijn mogelijk van 97.9 tot 100 pCt. (moleculair). In de oplossing waaruit beide zich afzetten bedraagt het $K\,Cl\,O_3$ gehalte 93.25 pCt. van het geheele aantal zoutmoleculen.

— Voor de Bibliotheek worden aangeboden, door den Heer STOKVIS: eene Engelsche vertaling van de door hem op het geneeskundig congres te Berlijn gehouden rede »over vergelijkende pathologie der menschenrassen";

door den Heer SCHOLS: eene nieuwe aflevering van »Waterbouwkunde" door HENKET, SCHOLS en TELDERS;

door den Heer SURINGAR een exemplaar van de dissertatie van den Heer J. VAN BREDA DE HAAN: »Anatomie van het geslacht Melocactus".

— De Heer MARTIN eindelijk, biedt voor de Verslagen en Mededeelingen aan de 1ste van eene Serie »Mededeelingen omtrent de geologie van Nederland, verzameld door de Commissie voor het geologisch onderzoek van Nederland", getiteld: Rapport omtrent eenige in de gemeente Havelte (Drenthe) verrichte grondboringen, door Dr. H. VAN CAPPELLE.

— De Voorzitter sluit de Vergadering.

OVER NEWTON'S BENADERINGSLEERWIJZE

VOOR DE

OPLOSSING VAN VERGELIJKINGEN.

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.



Zooals bekend is, komt de handelwijze van NEWTON voor de benaderde oplossing van eenige algebraïsche of transcendentale vergelijking $F(x) = 0$ hierop neder dat — als men twee waarden a en b kent, tusschen welke slechts één wortel x der vergelijking gelegen is, en die tevens onderling zoo weinig verschillen dat daartusschen geen wortel van de tweede afgeleide vergelijking $F''(x) = 0$ ligt, zoodat $F(a)$ en $F(b)$ tegengestelde, daarentegen $F''(a)$ en $F''(b)$ gelijke teekens vertoonen — alsdan bij substitutie van $x = a + z$ de vergelijking

$$F(a + z) = F(a) + z F'(a) + \text{ enz.} = 0$$

bij deze twee eerste termen wordt afgebroken en daaruit alzoo de benadering $x = a - \frac{F(a)}{F'(a)}$ wordt afgeleid; of wel, dat op overeenkomstige wijze de benadering $x = b - \frac{F(b)}{F'(b)}$ wordt opgemaakt; terwijl men om zeker te gaan in den regel liefst de eerste of de tweede van deze formulen toepast, naarmate $F(a)$ en $F''(a)$, dan wel $F(b)$ en $F''(b)$, gelijke teekens hebben.

In meetkundigen zin komt — onverschillig of de kromme $y = F(x)$ op regt- of op scheefhoekige assen in teekening wordt gebragt — deze handelwijze overeen met de vervanging van het punt, waar het gedeelte tusschen de door $x = a$ en $x = b$ aangeduide punten A en B dezer kromme zelve de abscissenas $y = 0$ snijdt, door het snijpunt van hare raaklijn hetzij in A of in B met deze as; waarbij men liefst weder gebruik maakt van diegene der beide raaklijnen die tusschen de kromme en de abscissenas ligt.

En dikwijls, vooral wanneer de benadering reeds eenigermate gevorderd is, stelt men ter verdere benadering ook wel het door $x = \frac{b\,F(a) - a\,F(b)}{F(a) - F(b)}$ aangewezen snijpunt van de koorde AB met de abscissenas in de plaats van het te bepalen snijpunt der kromme AB zelve.

De mogelijkheid bestaat echter bovendien om in vele gevallen — met name wanneer geen der beide snijpunten van de raaklijnen op aanzienlijken afstand van het snijpunt der koorde komt te vallen — door eene niet zeer zamengestelde formule het werkelijke snijpunt der kromme uit eene bepaalde verbinding van de drie omschreven nabijgelegen snijpunten met grooter naauwkeurigheid te benaderen.

Men stelle zich, om de bedoelde formule te vinden, eene willekeurige door den oorsprong O van regt- of scheefhoekige coördinatenassen OX en OY gaande kromme voor, waarvoor overeenkomstig de reeks van MACLAURIN — wanneer $x_k = \left(\frac{d^k x}{d y^k}\right)_0$ de waarde beteekent die de k^{de} afgeleide van x naar y in den oorsprong verkrijgt — de vergelijking gegeven is onder den vorm $x = \sum_1^\infty {}_k \frac{x_k}{k!} y^k$. De koorde van twee willekeurige punten (x, y) en (x', y') dezer kromme, namelijk $X - x = \frac{x - x'}{y - y'}(Y - y)$, snijdt dan de abscissenas $Y = 0$ in een door de abscis $\Phi = -\frac{x y' - x' y}{y - y'} =$

$= -\frac{yy'}{y-y'}\sum_1^\infty k\frac{x_k}{k!}(y^{k-1}-y'^{k-1})$ bepaald punt; en in deze formule zijn tevens, door eerst $y'=y\pm dy$, daarna $y=y'\pm dy'$ te onderstellen, als bijzondere gevallen de abscissen Φ_y en $\Phi_{y'}$ vervat van de snijpunten der raaklijnen in (x, y) en in (x', y') met de abscissenas, namelijk $\Phi_y=\frac{y^2}{\pm dy}\sum_1^\infty k\mp\frac{x_k}{k!}d(y^{k-1})=$

$= -\sum_1^\infty k(k-1)\frac{x_k}{k!}y^k$ en $\Phi_{y'}= -\sum_1^\infty k(k-1)\frac{x_k}{k!}y'^k$. Merkt men nu op dat zoowel in Φ als in Φ_y en $\Phi_{y'}$ de term voor $k=1$ zich tot nul herleidt, en dat bovendien de beide eerst voorkomende termen (voor $k=2$ en $k=3$) in $\frac{\Phi}{yy'}$, namelijk $-\left\{\frac{x_2}{2!}+\frac{x_3}{3!}(y+y')\right\}$, juist de gemiddelden zijn van die in $\frac{\Phi_y}{y^2}$ en in $\frac{\Phi_{y'}}{y'^2}$, namelijk $-\left\{\frac{x_2}{2!}+2\frac{x_3}{3!}y\right\}$ en $-\left\{\frac{x_2}{2!}+2\frac{x_3}{3!}y'\right\}$, dan blijkt dat $\frac{2\Phi}{yy'}-\left(\frac{\Phi_y}{y^2}+\frac{\Phi_{y'}}{y'^2}\right)$ alleen termen voor $k \geqq 4$ zal bevatten en dus, als de beide beschouwde punten (x, y) en (x', y') nabij den oorsprong liggen, slechts eene geringe waarde zal hebben. Met hooge benadering mag alzoo in dat geval het verband $\frac{2\Phi}{yy'}=\frac{\Phi_y}{y^2}+\frac{\Phi_{y'}}{y'^2}$ worden aangenomen, hetgeen echter voor de toepassing op ons onderwerp — omdat alsdan de afstanden Φ, Φ_y en $\Phi_{y'}$, gemeten uit den tot nog toe op de kromme zelve ondersteldeu oorsprong, alle drie onbekend zijn, maar daarentegen op de abscissenas de onderlinge afstanden $\varphi=\Phi-\Phi_y$ en $\varphi'=\Phi-\Phi_{y'}$ van de snijpunten der beide raaklijnen tot het snijpunt der koorde gemakkelijk berekend kunnen worden — doelmatig te vervangen is, indien men $\Phi_y=\Phi-\varphi$ en $\Phi_{y'}=\Phi-\varphi'$ substitueert en met $-\frac{y^2y'^2}{(y-y')^2}$ vermenigvuldigt, door het verband $\Phi=\frac{y'^2\varphi+y^2\varphi'}{(y-y')^2}$, dienstig om den afstand Φ van de kromme

zelve tot de koorde te benaderen uit de twee evengenoemde afstanden φ en φ'. Daartoe is namelijk, indien men zich het te bepalen snijpunt van de kromme $A\,B$ of $y = F(x)$ met de abscissenas als het tot oorsprong gekozen punt, en de wederzijdsche punten A en B als de punten (x, y) en (x', y') denkt, in de gevonden formule slechts $y = F(a)$ en $y' = F(b)$ te nemen — zoodat y en y' van zelf tegengestelde teekens verkrijgen — alsmede $\varphi = \Phi - \Phi_y =$

$$= \frac{bF(a)-aF(b)}{F(a)-F(b)} - \left\{a - \frac{F(a)}{F'(a)}\right\} = F(a)\left\{\frac{1}{F'(a)} - \frac{a-b}{F(a)-F(b)}\right\}$$

en $\varphi' = \Phi - \Phi_{y'} = \dfrac{b\,F(a) - a\,F(b)}{F(a)-F(b)} - \left\{b - \dfrac{F(b)}{F'(b)}\right\} =$

$$= F(b)\left\{\frac{1}{F'(b)} - \frac{a-b}{F(a)-F(b)}\right\},$$ waarna de aldus te vinden Φ, afgetrokken van $x = \dfrac{b\,F(a) - a\,F(b)}{F(a) - F(b)}$, den verlangden benaderden wortel zal geven.

Wil men zich nader rekenschap geven van de fout die men maakt door de gevonden benaderingsformule toe te laten, dan heeft men, door ook de termen voor $k \overline{>} 4$ aan te houden,

$$\Phi - \frac{y'^2\varphi + y^2\varphi'}{(y-y')^2} = - \frac{y^2 y'^2}{(y-y')^2}\left\{\frac{2\,\Phi}{y\,y'} - \left(\frac{\Phi_y}{y^2} + \frac{\Phi_{y'}}{y'^2}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{y^2 y'^2}{(y-y')^2}\sum_1^\infty \frac{x_k}{k!}\left\{-\frac{2(y^{k-1}-y'^{k-1})}{y-y'} + (k-1)(y^{k-2}+y'^{k-2})\right\},$$

of, als men de notatie $Y_k = \dfrac{(k-1)(y^{k-2}+y'^{k-2}) - \dfrac{2(y^{k-1}-y'^{k-1})}{y-y'}}{(y-y')^2}$ invoert — waarbij deze Y_k zoo dadelijk zullen blijken steeds geheele vormen in y en y' te zijn — de fout $\Phi - \dfrac{y'^2\varphi + y^2\varphi'}{(y-y')^2} =$

$$= - y^2 y'^2 \sum_1^\infty \frac{x^k}{k!} Y_k.$$ Hierin kan men namelijk, zich grondende op de opmerking dat de functiën Y_k onafhankelijk

van de x_k, dat is van den bijzonderen aard der beschouwde kromme, zijn, deze functiën ook opmaken door bij voorbeeld het eenvoudige geval $x_k = k!$, dat is de gewone hyperbool $x = \sum_1^\infty {}_k\, y^k = \frac{y}{1-y}$, te onderstellen: in dat geval is dus de fout evenredig aan $\sum_1^\infty {}_k\, Y_k$ zelf; en niet alleen laat zich deze som, hetzij door voor de hyperbool $x = \frac{y}{1-y}$ regtstreeks de fout zelve te berekenen, hetzij door de vorenstaande Y_k werkelijk te sommeren, gemakkelijk bepalen, maar, wat meer is, door splitsing in hare onderdeelen geeft zij iedere Y_k afzonderlijk, maar thans als geheelen vorm, terug. Door bij voorbeeld $\sum_1^\infty {}_k\, Y_k =$

$$= \frac{\sum_1^\infty {}_k(k-1)y^{k-2} + \sum_1^\infty {}_k(k-1)y'^{k-2} - \frac{2}{y-y'}\left(\sum_1^\infty {}_k y^{k-1} - \sum_1^\infty {}_k y'^{k-1}\right)}{(y-y')^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-y')^2} - \frac{2}{y-y'}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y'}\right)}{(y-y')^2} = \frac{\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y'}\right)^2}{(y-y')^2} =$$

$= \frac{1}{(1-y)^2} \cdot \frac{1}{(1-y')^2}$, met het oog op de omstandigheid dat iedere Y_k op zich zelve blijkbaar eene symmetrische gelijkslachtige $(k-4)^e$-graads-functie van y en y' moet zijn, te schrijven onder den vorm $\sum_1^\infty {}_k\, Y_k = \left\{\sum_{k-3}^{k-\infty} {}_i (k-2-i) y^{k-3-i}\right\} \left\{\sum_1^\infty {}_i\, i\, y'^{i-1}\right\} =$

$= \sum_1^\infty {}_k \left\{\sum_1^{k-3} {}_i\, i\,(k-2-i)\, y^{k-3-i}\, y'^{i-1}\right\}$, en door dan deze beiderzijdsche sommen in hare gelijkslachtige onderdeelen uiteen te doen vallen, heeft men dadelijk $Y_k = \sum_1^{k-3} {}_i\, i\,(k-2-i) y^{k-3-i} y'^{i-1}$.

Zoo is bij voorbeeld, behalve de reeds bekende $Y_1 = 0$,

$Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$, verder $Y_4 = 1$, $Y_5 = 2y + 2y'$, $Y_6 = 3y^2 + 4yy' + 3y'^2$, $Y_7 = 4y^3 + 6y^2y' + 6yy'^2 + 4y'^3$, enz.; zoodat in het algemeen de meergenoemde fout $\Phi - \dfrac{y'^2\varphi + y^2\varphi'}{(y-y')^2} =$

$$= -y^2y'^2 \left\{ \frac{x_4}{4!} + \frac{x_5}{5!}(2y + 2y') + \frac{x_6}{6!}(3y^2 + 4yy' + 3y'^2) + \text{enz.} \right\}$$

wordt. Op te merken vallen nog een paar gemakkelijk te bewijzen terugloopende betrekkingen tusschen de functiën Y_k, namelijk $(k-4)\,Y_k = (k-3)(y + y')\,Y_{k-1} - (k-2)\,yy'\,Y_{k-2}$

en $Y_k = \dfrac{y+y'}{2}\,Y_{k-1} + \dfrac{k-2}{2}\sum_{1}^{k-3} i\, y^{k-3-i}\,y'^{i-1} = yy'\,Y_{k-2} +$

$$+ (k-3)\sum_{1}^{k-3} i\, y^{k-3-i}\,y'^{i-1}.$$

De zoo even voor de fout gevonden formule beantwoordt evenwel nog niet geheel aan ons doel: immers zij is uitgedrukt in de opvolgende afgeleiden x_k van x naar y, en deze zijn niet regtstreeks bekend, daar de vergelijking der kromme juist onder den omgekeerden vorm, namelijk $y = F(x)$, uit de gegeven op te lossen vergelijking $F(x) = 0$ is afgeschreven. Het wordt dus noodig de genoemde afgeleiden x_k te berekenen uit de overeenkomstige afgeleiden van y naar x, waarvan weder meer in het bijzonder de waarden in het tot oorsprong genomen punt der kromme door $y_k = \left(\dfrac{d^k y}{dx^k}\right)_0$ mogen worden aangeduid, zoodat dan $y = \sum_{1}^{\infty} k\,\dfrac{y_k}{k!}\,x^k$ niet anders is dan de ontwikkelde, en op evenwijdig naar dien oorsprong verlegde assen betrekkelijke, vorm van de gegeven vergelijking $y = F(x)$: zoodanige verlegging toch blijft buiten invloed op de verschillende afgeleiden. Voor de bedoelde berekening nu van de x_k uit de y_k voor een oogenblik beiden opvattende als behoorende bij een ander willekeurig punt der kromme en dus niet als standvastigen, maar als functiën van de loopende coordinaten x of y, heeft men, om de x_k opvolgend uit elkander af te schrijven,

$$x_k = \frac{d^k x}{dy^k} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{d\left(\frac{d^{k-1}x}{dy^{k-1}}\right)}{dx} = y_1^{-1}\frac{dx_{k-1}}{dx},$$ gevende, als men uitgaat van $x_1 = \frac{dx}{dy} = y_1^{-1}$, verder $x_2 = y_1^{-1}\frac{dx_1}{dx} = -y_1^{-3}y_2$, $x_3 = y_1^{-1}\frac{dx_2}{dx} = -y_1^{-4}y_3 + 3y_1^{-5}y^2_2$, $x_4 = y_1^{-1}\frac{dx_3}{dx} = -y_1^{-5}y_4 + {}$ ${} + 10y_1^{-6}y_2y_3 - 15y_1^{-7}y_2^3$, $x_5 = y_1^{-1}\frac{dx_4}{dx} = -y_1^{-6}y_5 + {}$ ${} + 15y_1^{-7}y_2y_4 + 10y_1^{-7}y_3^2 - 105y_1^{-8}y_2^2y_3 + 105y_1^{-9}y_2^4$, enz. En deze algemeene herleidingsformulen blijven nu blijkbaar ook geldig in den oorsprong zelf, dat is indien zoowel aan x_k als aan y_k hare aanvankelijke beteekenis weder wordt toegekend. Op deze wijze is de meergenoemde fout

$$\Phi - \frac{y'^2\varphi + y^2\varphi'}{(y-y')^2} = -y^2y'^2 \Big\{ \frac{1}{24} y_1^{-5}(-y_4 + 10y_1^{-1}y_2y_3 - {}$$
$$- 15y_1^{-2}y_2^3) + \frac{1}{60}(y+y')y_1^{-6}(-y_5 + 15y_1^{-1}y_2y_4 + {}$$
$$+ 10y_1^{-1}y_3^2 - 105y_1^{-2}y_2^2y_3 + 105y_1^{-3}y_2^4) + \text{enz.} \Big\}$$

dus te berekenen uit de bekende waarden der beide eindordinaten $y = F(a)$ en $y' = F(b)$ en uit de waarden die de opvolgende afgeleiden y_k in het te bepalen snijpunt hebben. Deze laatste waarden zijn nu wel is waar niet naauwkeurig bekend, maar dit maakt bij de toepassing weinig bezwaar, daar zij in den regel wel zeer nabij zullen komen aan de voor de wederzijdsche punten A en B geldende overeenkomstige waarden, welke althans bij algebraïsche vergelijkingen van zelf bekend zijn uit de coëfficienten der reeds opgemaakte vergelijkingen in $x-a$ en $x-b$. In vele gevallen zelfs zal de werkelijke fout, die men begaat door $\Phi = \frac{y'^2\varphi + y^2\varphi'}{(y-y')^2}$ toe te laten, wel tusschen de aldus voor A en voor B te berekenen waarden liggen.

Indien men bij deze benaderingswijze van den aanvang af de raaklijnen in A en B had vervangen door de krommingsparabolen aldaar, door bij substitutie van $x = a + z$ de drie eerste termen in $F(a+z) = F(a) + zF'(a) + \frac{z^2}{2}F''(a) + \text{enz.} = 0$, in plaats van als boven de twee eerste termen, aan te houden en door dus z uit deze vierkantsvergelijking op te lossen of te benaderen, en evenzoo ten opzigte van b; en indien men dan weder de afstanden $\Psi\,(=\Phi)$, ψ en ψ' van de snijpunten der kromme zelve en van hare krommingsparabolen in A en in B, allen gemeten uit het snijpunt van de koorde AB, had berekend; zou gebleken zijn dat thans de verschillen $\Psi - \psi$, $\Psi - \psi'$ en $\psi - \psi'$ allen van de derde orde zijn (zooals trouwens te verwachten was), en dat men door eliminatie der termen van die orde thans de benaderingsformule $\frac{\Psi - \psi}{y^3} = \frac{\Psi - \psi'}{y'^3}$ verkrijgt.

Door eene naar aanleiding van het behandelde onderwerp met de Heeren Dr. A. J. van Pesch en A. E. Rahusen gevoerde briefwisseling werd meer in het bijzonder mijne aandacht gevestigd op de omstandigheid dat men zich wél moet wachten de onderstellingen, die veelal gemaakt worden om het onderzoek voor welke der beide grenzen de benaderingsleerwijze van Newton met zekerheid kan worden toegepast te vereenvoudigen, op te vatten als zoovele voorwaarden waaraan noodzakelijk tusschen de twee gegeven grenzen zelve zou moeten voldaan worden alvorens zonder voorafgaande vernaauwing dezer grenzen dadelijk tot de benadering te mogen overgaan. De bedoelde onderstellingen zijn gewoonlijk (zooals zij ook in den aanhef dezes vermeld zijn): dat tusschen a en b slechts één wortel van $F(x) = 0$ en geen wortel van $F''(x) = 0$ ligt; somtijds wordt daaraan toegevoegd: ook geen wortel van $F'(x) = 0$. Zij zijn allen geoorloofd in dézen zin dat men, als de gegeven grenzen a en b zelve hieraan niet voldoen, eene dier grenzen of beiden zoolang tot de andere kan doen toenaderen dat dit

binnen de nieuwe grenzen wel het geval wordt. Maar, eens en vooral nagegaan zijnde op welke der beide aldus vernaauwde grenzen de leerwijze veilig kan worden toegepast (namelijk op diegene waarvoor $F(x)$ en $F''(x)$ gelijke teekens hebben), kan men, mits zich ook voor de oorspronkelijk gegeven meer verwijderde grenzen steeds aan dezen regel houdende, in vele gevallen waarin door deze oorspronkelijke grenzen zelfs aan geene der drie genoemde onderstellingen zou voldaan wörden, toch zonder eene soms bewerkelijke voorafgaande vernaauwing van grenzen onmiddellijk tot de benadering overgaan.

Dit neemt intusschen niet weg dat — met name in die gevallen waarin $F(x) = 0$ slechts één en $F'(x) = 0$ en $F''(x) = 0$ geen wortel tusschen a en b heeft, en waarin tevens de wortel van $F(x) = 0$ nabij diegene der beide grenzen ligt waarvoor $F(x)$ en $F''(x)$ tegengestelde teekens hebben — het meermalen kan voorkomen dat de benadering sneller vordert door die juist, met afwijking van genoemden regel, toe te passen op de grens waarbij deze tegengestelde teekens behooren.

Bedrieg ik mij niet, dan zal men gewoonlijk het doelmatigst handelen door in die gevallen, waarin $F'(a)$ en $F'(b)$ tegengestelde teekens hebben, steeds te benaderen bij die grens waarvoor $F(x)$ en $F''(x)$ gelijke teekens vertoonen; maar door in de evenbedoelde gevallen, waarin $F'(a)$ en $F'(b)$ gelijke teekens hebben — onverschillig of $F(a)$ negatief of positief en dus $F(b)$ positief of negatief is, en onverschillig of $F''(x)$ tusschen a en b steeds positief of steeds negatief blijft — te benaderen bij de grens met gelijke dan wel met ongelijke teekens van $F(x)$ en $F''(x)$ naarmate, als a de kleinste der beide grenzen is, de daarbij behoorende eerste benadering $a - \frac{F(a)}{F'(a)}$ grooter dan wel kleiner dan de overeenkomstige $b - \frac{F(b)}{F'(b)}$ is.

Met deze opmerkingen staat in onmiddellijk verband dat niet alleen ingeval van tegengestelde teekens van $F'(a)$ en $F'(b)$ — als wanneer voor de benadering eene der beide

raaklijnen in A of in B geheel buiten beschouwing blijft — maar ook ingeval, bij gelijke teekens, $F'(a)$ of $F'(b)$ één van beiden zeer klein zijn — als wanneer de bijbehoorende raaklijn een ver verwijderd snijpunt zou geven — de boven opgemaakte benaderingsformule $\Phi = \frac{y'^2 \varphi + y^2 \varphi'}{(y-y')^2}$, waarin de snijpunten van beide raaklijnen vertegenwoordigd zijn, hare toepasselijkheid verliest en, hetzij dan noodzakelijk of althans doelmatig, dient vervangen te worden door eene andere die den afstand Φ van de kromme tot de koorde benadert alleen uit diengene van de beide afstanden φ en φ' der raaklijnen tot de koorde, die bij de werkelijk gebezigde raaklijn behoort. Zoodanige formule vindt men door, terugkeerende tot de oorspronkelijk voor Φ, Φ_y en $\Phi_{y'}$ opgemaakte waarden, deze nu niet alle drie onderling te verbinden, waardoor men boven in staat was tegelijkertijd de termen voor $k=2$ en voor $k=3$ te elimineren, maar thans alleen bij voorbeeld de twee eersten dezer waarden en wel, ter verdrijving van de termen voor $k=2$, onder den vorm $\frac{\Phi}{y'} - \frac{\Phi_y}{y}$ die, bij substitutie weder van $\Phi_y = \Phi - \varphi$, zoowel tot de benaderingsformule $\Phi = \frac{y'}{y'-y}\varphi$ voert als tot de daarmede gepaard gaande fout

$$\Phi - \frac{y'}{y'-y}\varphi = \frac{yy'}{y-y'}\left(\frac{\Phi}{y'} - \frac{\Phi_y}{y}\right) =$$

$$= \frac{y^2 y'}{y-y'} \sum_1^\infty {}_k \frac{x_k}{k!} \left\{ -\frac{y^{k-1} - y'^{k-1}}{y-y'} + (k-1)\, y^{k-2} \right\} =$$

$$= y^2 y' \sum_1^\infty {}_k \left\{ \frac{x_k}{k!} \sum_1^{k-2} {}_i \, (k-1-i)\, y^{k-2-i}\, y'^{i-1} \right\} =$$

$$= y^2 y' \left\{ \frac{x_3}{3!} + \frac{x_4}{4!}(2y+y') + \frac{x_5}{5!}(3y^2 + 2yy' + y'^2) + \text{ enz.} \right\}.$$

Door verwisseling hierin van y en y' heeft men evenzeer

$$\Phi + \frac{y}{y'-y}\varphi' = yy'^2\left\{\frac{x_3}{3!} + \frac{x_4}{4!}(y+2y') + \frac{x_5}{5!}(y^2+2yy'+3y'^2) + \text{enz.}\right\},$$

terwijl zooals zich verwachten liet de som van beider producten met $\frac{y'}{y'-y}$ en met $-\frac{y}{y'-y}$ weder de vroegere formule voor de fout $\Phi - \frac{y'^2\varphi + y^2\varphi'}{(y-y')^2}$ teruggeeft, welke laatste fout bij de toepassing op ons onderwerp, alwaar $y = F(a)$ en $y' = F(b)$ tegengestelde teekens hebben, tevens blijkt steeds tusschen de twee eerstgenoemde fouten te liggen.

In het algemeen een regel aan te geven, die dadelijk de in volstrekte grootte kleinste der drie fouten doet kennen, schijnt wegens de onzekerheid der teekens enz. niet wel doenlijk. Wil men zich door een eenvoudig voorbeeld rekenschap geven dat dit telkens van omstandigheden afhangt, dan kan weder de reeds boven voor $x_k = k!$ ter sprake gekomen hyperbool $x = \sum_1^\infty k\, y^k = \frac{y}{1-y}$ dienen. Denkt men zich hier y negatief, en y' positief maar weinig kleiner dan de bij de asymptoot behoorende waarde $y' = 1$, dan kan alligt de bij y' behoorende raaklijn een zóó verwijderd snijpunt opleveren, dat het voordeeliger is dit geheel buiten beschouwing te laten. Door de vroegere formule voor de fout

$$\Phi - \frac{y'^2\varphi + y^2\varphi'}{(y-y')^2} = -y^2y'^2\sum_1^\infty k\, Y_k = -\frac{y^2\,y'^2}{(1-y)^2\,(1-y')^2}$$ in

dit geval, en de thans opgemaakte formule voor de fout

$$\Phi - \frac{y'}{y'-y}\varphi = \frac{y^2y'}{y-y'}\sum_1^\infty k\left\{-\frac{y^{k-1}-y'^{k-1}}{y-y'} + (k-1)y^{k-2}\right\} =$$

$$= \frac{y^2y'}{y-y'}\left\{-\frac{1}{y-y'}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y'}\right) + \frac{1}{(1-y)^2}\right\} = \frac{y^2y'}{(1-y)^2(1-y')},$$

wordt dit bevestigd: de eerste, hier steeds negatieve, fout blijft in volstrekte waarde slechts dán kleiner dan de tweede, hier steeds positieve, als $\frac{y'}{1-y'} < 1$ of $y' < \frac{1}{2}$ is.

De Heer RAHUSEN, wien ik mijne oorspronkelijke redactie — waarbij ik dadelijk van de vergelijking der kromme onder den vorm $y = F(x)$, en niet als boven van de voorafgaande ontwikkeling van x volgens y, uitging — ter kennisneming toezond, deelde mij alstoen nog het volgende mede:

»Zij A en B twee punten eener parabolische kromme van den 3den graad $x = a y^3 + b y^2 + c y + d$, en C een punt van de koorde AB, waarbij $AC : CB = m : n$ en $m + n = 1$. Snijdt nu de lijn door C evenwijdig aan de X-as getrokken de raaklijnen in de punten A en B in E en F en de kromme in D, zoo heeft men

$$CD = n^2 . CE + m^2 . CF$$

of, als men $CD = \Phi$, $CE = \varphi$ en $CF = \varphi'$ stelt,

$$\Phi = n^2 \varphi + m^2 \varphi'.$$

Voor de afleiding dezer betrekking doet men misschien het best de lijn AB als Y-as en het midden O van AB als oorsprong te kiezen. Wordt daarbij de richting der X-as aangehouden, zoo blijft de vorm van de vergelijking der kromme onveranderd. Stelt men voorts $BO = OA = \delta$, dan kan voor de vergelijking der kromme geschreven worden

$$x = (y^2 - \delta^2)(\alpha y + \beta)$$

of

$$x = \alpha (y^3 - \delta^2 y) + \beta (y^2 - \delta^2) \; \ldots \ldots \; (1)$$

en voor de vergelijkingen van de raaklijnen in de punten A en B

$$x = [\alpha . 2\delta^2 + \beta . 2\delta](y - \delta) \; \ldots \ldots \; (2)$$

$$x = [\alpha . 2\delta^2 - \beta . 2\delta](y + \delta) \; \ldots \ldots \; (3)$$

Stelt men in de vergelijkingen (1), (2) en (3) $y = OC = (n-m)\delta$:

$$\Phi = \alpha \delta^3 [(n-m)^3 - (n-m)] + \beta \delta^2 [(n-m)^2 - 1]$$
$$\varphi = \alpha \delta^3 [\quad -4m \quad] + \beta \delta^2 [\quad -4m \quad]$$
$$\varphi' = \alpha \delta^3 [\quad 4n \quad] + \beta \delta^2 [\quad -4n \quad].$$

Elimineert men eindelijk uit deze betrekkingen $\alpha\delta^3$ en $\beta\delta^2$, waarbij in het oog is te houden, dat het tweede lid der eerste betrekking gedeeld kan worden door $(n-m)^2-1=-4mn$, dan vindt men:

$$\begin{vmatrix} \frac{\Phi}{mn} & m-n & -1 \\ \frac{\varphi}{m} & -1 & -1 \\ \frac{\varphi'}{n} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

of

$$\Phi = n^2\varphi + m^2\varphi'.$$

Hieruit laat zich gemakkelijk de beantwoording afleiden van de volgende vraag: De kromme $x=ay^3+by^2+cy+d$ is bepaald door twee punten en de raaklijnen in deze punten; men vraagt eene constructie voor de abscis behoorende bij eene gegevene ordinaat.

De door u gegeven benaderingsformule, die blijkens het voorgaande volkomen nauwkeurig geldt voor de kromme $x=ay^3+by^2+cy+d$, komt dus neer op het vervangen van het tusschen de grenzen gelegen deel van de beschouwde kromme door de parabolische kromme, die in de met de grenswaarden overeenkomende punten aan de eerste kromme rakende aansluit. Het valt onmiddellijk in het oog, dat de daardoor gemaakte fout naar δ ontwikkeld geene lagere machten dan δ^4 bevat.

Voor de parabolische kromme van den 5den graad $x=ay^5+by^4+cy^3+dy^2+ey+f$ kan eene overeenkomstige betrekking worden gegeven. Daarbij worden niet alleen beschouwd de raaklijnen in de punten A en B, maar tevens de osculeerende parabolen in deze punten, welker vergelijkingen van den vorm $x=\alpha y^2+\beta y+\gamma$ zijn. Geeft men de snijpunten dezer parabolen met de lijn door C evenwijdig aan de X-as getrokken, aan door G en H en stelt men $CG=\psi$ en $CH=\psi'$, dan heeft men

$$\Phi = 3\, m\, n^3\, \varphi + 3\, m^3\, n\, \varphi' + n^3\, \psi + m^3\, \psi'."$$

Bovendien maakte de Heer RAHUSEN mij opmerkzaam dat in J. B. J. FOURIER, *Analyse des équations déterminées*, 1831 — alwaar volgens opgaaf van den hoogleeraar Dr. A. J. VAN PESCH, als $F(a)$ en $F''(a)$ gelijke teekens hebben, $a - \frac{F(a)}{F'(a)}$ en $b - \frac{F(b)}{F'(a)}$ $\left(\text{in plaats van } b - \frac{F(b)}{F'(b)}\right)$ als twee nieuwe grenzen gegeven worden waartusschen de wortel ligt — de benaderingsleerwijze van NEWTON zeer uitvoerig wordt besproken, vooral in verband met de fout in elke benaderde waarde. Aangetoond wordt dat, als ω en ω' de fouten in twee opeenvolgende benaderde waarden zijn, Lim. $\frac{\omega'}{\omega^2} = -\frac{F''(x)}{2\,F'(x)}$ is, waaruit afgeleid wordt dat het aantal der decimalen, die in eene benaderde waarde vertrouwen verdienen, in het algemeen bij elke bewerking verdubbelt. In verband met de toepassing der benaderingsleerwijze wordt nog eene verkorte wijze van deeling gegeven, waarbij de cijfers van deeler en deeltal pas gebruikt worden op het oogenblik dat zij invloed gaan oefenen op het quotient. Bij sommige beschouwingen wordt door FOURIER zelfs ondersteld dat $F'''(x)$ niet van teeken verandert.

En eindelijk wees de Heer RAHUSEN er mij op, dat bij eene volledige behandeling van NEWTON's leerwijze ook het geval moet beschouwd worden waarin de te benaderen wortel van $F(x) = 0$ tevens wortel is van $F''(x) = 0$; dat, als daarbij $F(a)$ en $F''(a)$, en dus ook $F(b)$ en $F''(b)$, gelijke teekens hebben, de gezochte wortel zoowel van de eene als van de andere zijde kan benaderd worden; dat, wanneer daarentegen de teekens van $F(a)$ en $F''(a)$, en dus ook die van $F(b)$ en $F''(b)$, verschillen, zich de bijzonderheid voordoet dat, als men de benaderingsleerwijze, uitgaande van eene der beide grenswaarden a of b, een aantal malen toepast, de achtereenvolgende benaderde waarden beurtelings grooter en kleiner dan de wortel zijn, maar toch — mits men slechts het verschil der beide oorspron-

kelijke grenswaarden klein genoeg heeft genomen — steeds de ware waarde van den wortel tot limiet hebben.

Aan ons medelid Dr. C. H. C. Grinwis dank ik nog de mededeeling dat Ch. de Comberousse in zijn *Cours de Mathématiques*, Tome IV, Algèbre supérieure, 2e partie, 2e Ed., 1890, blz. 534, voorstelt als benadering te nemen het midden tusschen de snijpunten van de boven meermalen genoemde koorde AB en van de tusschen de kromme en de abscissenas gelegen raaklijn in A of in B.

Ten slotte maak ik van deze gelegenheid gebruik om de aandacht te vestigen op een drietal belangrijke en mijns inziens voor daadwerkelijke toepassing zeer geschikte artikels van Dr. R. Mehmke, hoogleeraar aan de technische Hochschule te Darmstadt, getiteld: 1° Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen. Ein Beitrag zum graphischen Rechnen (in *Civilingenieur*, 1889, Band 35, 8es Heft); 2° Neues Verfahren zur Bestimmung der reellen Wurzeln zweier numerischer algebraischer Gleichungen mit zwei Unbekannten (in *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 35er Jahrg.); 3° Praktische Methode zur Berèchnung der reellen Wurzeln reeller algebraischer oder transcendenter numerischer Gleichungen mit einer Unbekannten (in hetzelfde tijdschrift, met dagteekening van Mei 1890). Dit laatste artikel sluit zich aan de benaderingsleerwijze van Newton aan.

Mei 1891.

MEDEDEELINGEN OMTRENT DE GEOLOGIE VAN NEDERLAND, VERZAMELD DOOR DE COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK.

N°. 1.

RAPPORT

OMTRENT EENIGE IN DE GEMEENTE HAVELTE (DRENTHE) VERRICHTE GRONDBORINGEN.

DOOR

Dr. H. VAN CAPPELLE.

Alvorens tot den bouw van twee nieuwe sluizen in de Drentsche Hoofdvaart over te gaan, werden tot opsporing van den bouw des bodems, waardoor de heipalen geslagen moeten worden, een zestal ± 10 M. diepe boringen nuttig geoordeeld. Voor rekening van de Akademische commissie voor het geologisch onderzoek van Nederland was ik bij deze boringen tegenwoordig, overtuigde ik mij, dat de grondsoorten, dank zij de uitmuntende zorg van den hoofdopzichter, den Heer H. Boeree (die de vriendelijkheid had, mij een aantal nuttige inlichtingen te verstrekken), nauwkeurig verzameld werden en hield ik mij met eenige terreinstudiën bezig.

Daar een uitvoerig verslag dezer boringen in een later te verschijnen verhandeling over het diluvium van West-Drenthe zal worden opgenomen, laat ik hier slechts enkele korte mededeelingen volgen.

Een blik op de geologische kaart leert, dat de bodem, waarop deze boringen plaats hadden, door het vlakke terrein van het zanddiluvium gevormd is, hetwelk in het breede, in zuidwestelijke richting verloopende dal tot afzetting gekomen is, dat het sterk stroomende smeltwater tijdens

de afsmelting van het landijs gaandeweg in de grondmoraine had uitgespoeld.

Drie der boorpunten bevinden zich op korten afstand beneden de Uffelter schutssluis, waar de bodem zich 4.40 M. boven AP. verheft, de drie anderen beneden de Havelter sluis, waar de grond 2.78 M. boven AP. ligt.

Het onderzoek der grondsoorten leerde mij het volgende:

Het *zanddiluvium* bezit op geen enkel boorpunt een grooter dikte dan 2 M. en rust overal op een met grootere en kleinere, somwijlen duidelijk geschuurde en gepolijste steenen gemengd, meer of minder scherp zand, dat als de *grondmoraine* van het diluviale landijs moet beschouwd worden. De enorme uitspoeling en erosie, die deze grondmoraine hier heeft ondergaan, blijkt niet alleen reeds uit het feit, dat deze vorming, die aan de oevers van bovengenoemd dal, o. a. te Havelte en op de lagere punten te Uffelte, waar zij aan de oppervlakte komt, een aanzienlijke dikte (tot 6 M.) bereikt en er door een veelal zeer vet *keileem* vertegenwoordigd wordt, in geen enkel boorpunt dikker is dan 2 M. en slechts onderaan op *enkele* punten duidelijk leemhoudend is *), doch ook uit den langzamen overgang, dien ik overal tusschen de grondmoraine en het zanddiluvium heb waargenomen. In een der boorpunten was zelfs de grondmoraine geheel geërodeerd en ging het zanddiluvium ongemerkt in het glaciaalgelaagd diluvium over.

Ook bij de graving van het hulpkanaal te Uffelte bleek de erodeerende werking, die het smeltwater op het keileem heeft uitgeoefend zeer duidelijk: terwijl ik nl. op sommige punten onder het zanddiluvium echt keileem waarnam, lagen daar, waar dit laatste geheel was uitgespoeld, nog slechts eenige, somwijlen zeer groote, keien als laatste overblijfselen dezer vorming tusschen het zand.

Uit deze verschijnselen blijkt weder duidelijk, dat het *keizand*, waaronder ik de *uitgespoelde* grondmoraine versta, het *rolsteenzand*, dat de *verplaatste* grondmoraine is en het

*) Slechts in een der 6 boorpunten (in Uffelte) was, n.l. op een diepte van 3 M., het oorspronkelijke keileem nog bewaard gebleven.

zanddiluvium (hier het *dalzand*) gelijktijdig gevormd zijn en dat het niet altijd gemakkelijk valt te beslissen, welke van de beide eerstgenoemde vormingen men voor zich heeft.

De grondmoraine rust in alle boorpunten op glaciaal gelaagd diluvium, dat doorgaans bijna onmerkbaar in eerstgenoemde vorming overgaat en dat met uitzondering van enkele witte kwartsfragmenten, die hier en daar voornamelijk in de onderste deelen optreden, uit noordelijke elementen is samengesteld. Zijn nu deze door de gletscherbeken van het naderende landijs gevormde afzettingen in de meeste punten door een dan eens fijner, dan weder grover zand vertegenwoordigd, te Uffelte werd dit zand op twee, 38 M. van elkander verwijderde, punten door een ± 4 M. dikke blauwe fijne klei afgewisseld, die in het midden zeer vet, doch in de onderste en bovenste deelen zanderig is en daardoor ongemerkt in zand overgaat.

Deze klei, die ongetwijfeld in een meer bezonken is, bevat o. a. een uitmuntend bewaarde vrucht van *Corylus Avellana* L., en een 4 cM. groot, ontwijfelbaar houtfragment van den eik (*Quercus Robur?*) — planten, die op een gematigd klimaat wijzen en die ook in Noord-Duitschland, Engeland en Zwitserland in kleilagen van interglaciale en praeglaciale zoetwaterbekkens aangetroffen zijn. Opmerking verdient nog, dat deze planten ook hier, evenals in Schonen, slechts aan de onderste grens van het leemachtig zand begraven liggen, hetwelk onmiddelijk door de gletscherbeken van het naderende landijs is afgezet, en eindelijk, dat ik in de onderste zanderige lagen dezer meerafzetting slechts eenige kelkkafjes en stengel- en bladfragmenten van Gramineeën en Cyperaceeën (waaronder die van *Phragmites communis*) aantrof. Wensch ik de vraag naar den ouderdom dezer vorming later, nl. in verband met mijne waarnemingen in West-Drenthe te behandelen, het zij mij hier voldoende, te hebben aangetoond, dat onmiddelijk vóór de aankomst van het landijs ook in ons land meeren aanwezig waren, *in wier omtrek eene flora gevonden werd, die in een gematigd klimaat tehuis behoort.*

Sneek, 27 April 1891.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 Juni 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, RAUWENHOFF, MOLL, PEKELHARING, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, VAN DER WAALS, BAKHUIS ROOZEBOOM, SCHOLS, BIERENS DE HAAN, VAN BEMMELEN, HOOGEWERFF, MARTIN, HOEK, PLACE, WEBER, BEHRENS, MAC GILLAVRY, ENGELMANN, KOSTER, FORSTER, MULDER, ZEEMAN, STOKVIS, SURINGAR, VAN DIESEN, BEIJERINCK en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden: 1°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 5 Juni 1891; 2°. C. WINKLER, Secretaris van de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië te Batavia, 10 April 1891; 3°. E. COUBREAUX, Secretaris van de Société entomologique de Belgique te Brussel, 22 Juni 1891; 4°. den Secretaris van de kon. Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde te Gent, 1891; 5°. A. TIELEMANN, Bibliothecaris van de Université Catholique te Leuven, 25 Juni 1891; 6°. den Secretaris van de royal

Society te Londen, Juni 1891; 7⁰. R. Rost, Bibliothecaris van het India Office te Londen, 19 Juni 1891; 8⁰. P. L. Sclater, Secretaris van de Zoological Society te Londen, 18 Juni 1891; 9⁰. W. J. Thiselton Dyer, Directeur van de royal botanic Gardens te Kew, 23 Juni 1891; 10⁰. den Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 22 Juni 1891; 11⁰. F. Max Müller te Oxford, 23 Juni 1891; 12⁰. P. G. Tait, Secretaris van de royal Society te Edinburg, 19 Juni 1891; 13⁰. C. Fischnaler, Bibliothecaris van het Tirolisch Ferdinandeum te Innsbruck, 25 Juni 1891; 14⁰. O. Bezold, Directeur van het kön. preuss. meteorologisches Institut te Berlin, 18 Juni 1891; 15⁰. H. von Helmholtz te Charlottenburg, 1891; 16⁰. A. Weber te Berlijn, 22 Juni 1891; 17⁰. Joh. Franck te Bonn, 18 Juni 1891; 18⁰. G. Voss, Directeur van de naturforschende Gesellschaft te Emden, 18 Juni 1891; 19⁰. C. Gegenbaur te Heidelberg, 20 Juni 1891; 20⁰. Th. Nöldeke te Straatsburg, 21 Juni 1891; 21⁰. H. von Sybel te Marburg, 21 Juni 1891; 22⁰. B. Windscheid te Leipzig, 25 Juni 1891; 23⁰. Ackermann, Directeur van het Verein für Naturkunde te Cassel, 1891; 24⁰. A. L. Rilliet, Secretaris van de Société de Physique et d'Histoire naturelle te Genève, 15 Juni 1891; 25⁰. Alph. de Candolle te Genève, 1891; 26⁰. F. Imhoof Blumer te Winterthur, 22 Juni 1891; 27⁰. G. B. de Rossi te Rome, 23 Juni 1891; 28⁰. Sophus Bugge te Christiania, 6 Juli 1891; 29⁰. H. Phillips jr., Secretaris van de American philosophical Society te Philadelphia, 1891; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden: 1⁰. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 19, 24 Juni 1891; 2⁰. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 5, 9 Juni 1891; 3⁰. G. A. van Hamel, Rector Magnificus van de Universiteit van Amsterdam, 30 Juni 1891; 4⁰. A. Sandoz te Parijs, 21 Juni 1891; 5⁰. A. de Caligny te Versailles, 13, 21 Juni 1891; 6⁰. R. Godley, Under-Secretary of State for India te Londen, 9 Juni 1891; 7⁰. P. L. Sclater, Secretaris van de

zoological Society te Londen, Juni 1891; 8°. T. Karolyi te Budapest, Juni 1891; 9°. A. C. Drolsum, Bibliothecaris van de Universiteit te Christiania, 8 Mei 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1° een brief van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken (25 Juni 1891), waarin wordt goedgekeurd de door het Bestuur der Akademie voorgestelde wijziging van Art. 12 der algemeene Bepalingen;

2° eene circulaire van de Académie des Sciences, des Lettres et des beaux Arts de Belgique, de kennisgeving behelzend dat de Heer Edmond Marchal wijlen den Heer Liagre opgevolgd is als »Secrétaire perpétuel" der Belgische Akademie;

3° een opstel van het lid der Akademie F. J. van den Berg, bestemd voor de Verslagen en Mededeelingen en getiteld: »Over krommingskegelsneden van vlakke kromme lijnen".

— De Heer Pekelharing spreekt over de beteekenis van kalkzouten voor de stolling van het bloed. Jaren geleden is er door Brücke reeds de aandacht op gevestigd, dat fibrine steeds kalkzouten bevat. Hammarsten toonde in 1875 aan, dat de vorming van fibrine uit fibrinogene stof, door bemiddeling van het fibrineferment, bevorderd wordt door de toevoeging van $CaCl_2$. In 1887 vond Green, dat $CaSO_4$ niet alleen de werking van het fibrineferment bevordert, maar dat zelfs in verdund magnesiumsulfaatplasma de stolling door toevoeging van gipsoplossing alleen, zonder ferment, kan worden teweeggebracht. Onlangs toonden Arthus en Pagès aan dat, omgekeerd, de stolling van het bloed kan worden belet, door het, uit het levende lichaam, op te vangen in oplossingen van kaliumoxalaat, fluornatrium of zeep, waardoor kalkzouten worden neergeslagen

Welke rol de kalkzouten bij de stolling spelen bleef echter duister. Freund zocht een verklaring te geven door

aan te nemen dat de bloedlichaampjes, zoodra zij niet meer met den levenden vaatwand in aanraking zijn, phosphaten aan het plasma afstaan, dat tengevolge daarvan tricalciumphosphaat wordt gevormd, en dat hierin de oorzaak gelegen is van de afscheiding van fibrine. De onjuistheid van deze onderstellingen is door LATSCHENBERGER en door STRAUCH aangetoond. Spr. kan daarbij voegen, dat, indien FREUND's opvatting juist ware, inspuiting van dinatriumphosphaat in een ader intravasculaire stolling tengevolge zou moeten hebben, hetgeen, althans bij het konijn, geenszins het geval is. ARTHUS en PAGÈS zijn geneigd te meenen, dat voor de vorming van fibrine uit fibrinogene stof de samenwerking noodig is van ferment en kalkzouten, op dezelfde wijze als uit caseïne eerst door de samenwerking van lebferment en kalkzouten kaas ontstaat. Ook tegen deze meening moet bezwaar gemaakt worden. Plasma van runderbloed, dat door opvangen in kaliumoxalaat van kalkzouten beroofd en ongestold gebleven was, en door toevoeging van $Ca\,Cl_2$ tot volkomen stolling gebracht kon worden, werd vermengd met 10 maal verdund $Mg\,SO_4$-plasma, zonder dat een spoor van stolling daarvan het gevolg was. Derhalve bevatte het oxalaatplasma geen ferment, want wanneer aan het verdunde $Mg\,SO_4$-plasma ferment, hetzij naar de methode van SCHMIDT, hetzij naar die van HAMMARSTEN bereid, werd toegevoegd, dan bleef de stolling niet uit.

GREEN vond dat $Ca\,SO_4$ verdund magnesiumsulfaatplasma tot stolling kon brengen, maar niet een zuivere oplossing van fibrinogeen. Spr. kon dit bevestigen, en vond daarbij, evenals RINGER en SAINSBURY, dat een oplossing van $Ca\,Cl_2$ evenzeer de stolling bevordert als een oplossing van gips. Er is dus in het $Mg\,SO_4$-plasma een stof, die met behulp van kalkzouten stolling kan teweeg brengen, en deze stof ontbreekt in zuivere oplossingen van fibrinogeen. Deze stof is niet fibrineferment, maar kan, met kalkzouten in aanraking komende, fibrineferment leveren. Bloed in een verzadigde oplossing van $Mg\,SO_4$ opgevangen, werd gecentrifugeerd. Het heldere plasma werd met een gelijk volume verzadigde $Na\,Cl$-oplossing vermengd en weder gecentrifugeerd. Het

praecipitaat van fibrinogeen, in water opgelost, stolde na toevoeging van een weinig Ca Cl_2 of Ca SO_4. Werd het fibrinogeen uit deze oplossing weder door een gelijk volume Na Cl afgescheiden en in water opgelost, dan kon deze oplossing soms wel, soms niet tot stolling gebracht worden door toevoeging van kalkzouten. Fibrinogeen ten derden male afgescheiden en weer opgelost, stolde nooit, ook na langen tijd, bij een temperatuur van 35° C., met kalkzouten in aanraking te zijn geweest.

Volkomen dezelfde uitkomst werd verkregen, wanneer het bloed, in plaats van door Mg SO_4, vloeibaar gehouden was door het op te vangen in $^1/_{10}$ volume kaliumoxalaat 1 pCt.

Voor de proeven werd gebruikt bloed van het rund, van het kalf, van het varken en van den hond.

De stof, die naast kalkzouten voor de vorming van fibrine uit fibrinogeen noodig is, wordt dus niet zoo gemakkelijk door Na Cl gepraecipiteerd als fibrinogeen. Zij was te vinden in het plasma, waaruit door Na Cl het fibrinogeen was neergeslagen. Werd daaruit globuline neergeslagen, hetzij door dialyse, hetzij door verzadigen met Na Cl of met Mg SO_4, dan bleek deze globuline alleen geen werking op fibrinogeen te vertoonen; maar zoodra eenig Ca Cl_2 of Ca SO_4 werd toegevoegd, ook in zuivere oplossingen van fibrinogeen te werken als fibrineferment. Het gelukte tot dusver niet, deze stof van de serumglobuline te scheiden. Evenals deze laatste, wordt zij door dialyse en door saturatie met Na Cl onvolkomen, door saturatie met Mg SO_4 volkomen neergeslagen. Haar werking is niet gelijk aan die van het lebferment op caseïne. Bij de vorming van kaas werken enzym en kalkzouten onafhankelijk van elkander. Is kalkvrije caseïne eenige minuten met kalkvrije leb in aanraking geweest, dan brengt toevoeging van kalkzouten onmiddellijk de afscheiding van kaas teweeg. Maar een zuivere oplossing van fibrinogeen, komt na de toevoeging van kalkzouten, niet eerder tot stolling, hetzij de uit het plasma afgescheiden en van zouten bevrijde globuline er van te voren of tegelijk met de kalkoplossing aan toegevoegd is. Wordt deze glo-

buline met Ca Cl_2 vermengd, en daarna door dialyse gezuiverd, dan verkrijgt men een stof, die in haar werking volkomen aan uit bloemserum bereid fibrineferment gelijk is. Zij brengt in zuivere oplossingen van fibrinogeen volmaakt typische stolling teweeg. Haar optimum van werking ligt bij 30° à 40° C.; verhitting op 60° à 80° maakt haar werkeloos. Evenals fibrineferment, is zij een kalkverbinding, die door ammonium-oxalaat niet ontleed wordt. Evenals fibrineferment, draagt zij kalk op fibrinogeen over. Wordt een zuivere oplossing van fibrinogeen in twee gelijke helften verdeeld, en de eene helft tien minuten lang op 60° verwarmd, de andere helft met uit bloedserum bereid ferment, of met de door Ca Cl_2 uit globuline bereide verbinding vermengd, dan kan in de asch van de gevormde fibrine telkens kalk worden aangetoond, terwijl in de asch van het door verhitting verkregen stollingsproduct geen spoor van kalk te vinden is. Het eenige verschil tusschen dit kunstmatig bereide en het uit serum verkregen ferment werd hierin gevonden, dat het eerste door verzadigen met Mg SO_4 volkomen, door dialyse grootendeels uit de oplossing werd neergeslagen, terwijl in het bloedserum, ook na verzadiging met Mg SO_4 (juist daarop berust HAMMARSTEN's methode van bereiding), nog ferment in ruime hoeveelheid opgelost kan blijven. Spreker meent echter, dat aan dit verschil, vooral wanneer men HALLIBURTON's onderzoekingen omtrent den aard van het fibrineferment in aanmerking neemt, niet veel gewicht gehecht zal worden, en meent te mogen aannemen dat fibrineferment een organische kalkverbinding is, die, met fibrinogeen onder gunstige omstandigheden in aanraking komende, daaraan kalk afstaat, en zoo tot de vorming van fibrine aanleiding geeft. Hij acht het waarschijnlijk dat, wanneer het bloed de vaten verlaat, de afstervende gevormde elementen een eiwitstof — misschien HALLIBURTON's celglobuline — afstaan, die, in het plasma opgelost, daarin kalkzouten vinden om zich mede te verbinden, en zoo tot fibrineferment te worden. Het tot stand komen van die verbinding zou dan belet worden, zoowel door het bloed terstond met een sterke ..toplossing, waardoor globulinen in minder bewegelijken

vorm gebracht worden, te vermengen, als door het op te vangen in een vloeistof, die de kalkzouten van het plasma vastlegt voordat het afsterven der gevormde elementen begonnen is.

Wanneer men bedenkt, dat door intraveneuse inspuitingen van stoffen, die zonder twijfel kalkzouten vastleggen, natriumoxalaat en zeepen, bij honden het bloed van het vermogen om te stollen beroofd wordt, terwijl de bloedsdrukking sterk daalt en dat deze verschijnselen ook waargenomen worden bij inspuiting van pepton in het bloed van honden, dan rijst de vraag of ook door pepton in het plasma opgeloste kalkzouten gebonden en daardoor belet worden tot de vorming van het fibrineferment mede te werken. Inderdaad bleek, dat door kalkzouten de werking van pepton op de stolling van het bloed opgeheven kon worden. Fibrine werd met kunstmatig maagsap gedigereerd. De eene helft der vloeistof werd met Na HO, de andere met $Ca\,CO_3$ geneutraliseerd. Na filtratie werden beide helften tot hetzelfde volume ingedampt, en met gelijke hoeveelheden alcohol neergeslagen. De praecipitaten werden in gelijke hoeveelheden water opgelost. Het met Na HO geneutraliseerde pepton werkte zeer krachtig. Inspuiting van nog niet ten volle 0.5 gr. veroorzaakte bij een hond van 5.8 kilogr. sterke daling van de bloedsdrukking, en het uit de carotis opgevangen bloed bleef vloeibaar. Het daaruit door centrifugeeren afgescheiden plasma stolde door verdunning en door doorleiden van CO_2, en zette, na afkoeling tot $\pm$ 0° C., het door WOOLDRIDGE onder den naam van A-fibrinogeen beschreven praecipitaat af. Van het met $Ca\,CO_3$ geneutraliseerde pepton daarentegen kon bij een hond van 6.2 kilogr. 2.5 grm. ingespoten worden, zonder dat de bloedsdrukking een noemenswaardige daling onderging, en zonder dat het bloed het vermogen om te stollen verloor. Zelfs werd het met den manometer verbonden buisje door een coagulum verstopt. In andere proeven werd eerst pepton (hetzij door Spr. zelven bereid, hetzij uit den handel van WITTE of van GRÜBLER, ingespoten, en daarna een 1 pCt. oplossing van $Ca\,Cl_2$. Het bloed, dat na de inspuiting van pepton het vermogen

om te stollen verloren had, verkreeg dit na de inspuiting van Ca Cl_2 terug. De dieren, door het pepton in narcose gebracht, werden tijdens de inspuiting van Ca Cl_2 weder onrustig, terwijl de sterk gedaalde bloedsdrukking weer tot normale hoogte steeg. Pepton is in staat de vorming van het fibrineferment, het tot stand komen namelijk van de als ferment werkende kalkverbinding, te beletten, maar niet in staat de werking van het eenmaal gevormde ferment op te heffen. Twee gelijke hoeveelheden zuiver fibrinogeen werden vermengd met gelijke hoeveelheden GRÜBLER's pepton. Aan het eene buisje werd toegevoegd uit plasma afgescheiden globuline met een weinig Ca Cl_2. Aan het andere dezelfde globuline, te voren met Ca Cl_2 gedigereerd en gedialyseerd. Terwijl in het laatste buisje de vloeistof volkomen stolde, was in het eerste na 24 uren nog geen spoor van stolling waar te nemen.

Een van de belangrijkste gronden, door WOOLDRIDGE aangevoerd tegen de meening, dat fibrinogeen als zoodanig opgelost in het bloed zou voorkomen, ligt in de werking van de stof, die door hem weefselfibrinogeen genoemd is. Deze stof brengt bij honden, en vooral bij konijnen, wanneer zij in een ader wordt ingespoten, stolling van het bloed in de levende vaten teweeg. Toch is zij niet in staat zuivere oplossingen van fibrinogeen tot stolling te brengen. Ook hier echter komt de beteekenis der kalkzouten uit. Het bleek spr. dat, naar WOOLDRIDGE's voorschrift, uit kalfsthymus bereid »weefselfibrinogeen", waardoor bij een konijn uitgebreide intravasculaire stolling kon worden opgewekt, niet alleen, maar wel na toevoeging van Ca SO_4 of Ca Cl_2, in staat was een zuivere oplossing van fibrinogeen tot stolling te brengen. Het zoogenaamde weefselfibrinogeen leverde, na digestie met Ca Cl_2 en daaropvolgende dialyse, een stof, die zich, evenals de uit plasmaglobuline bereide, alleen hierdoor van, naar HAMMARSTEN's methode, uit bloedserum verkregen fibrineferment onderscheidde, dat zij door dialyse, ten minste grootendeels, werd neergeslagen.

— De Heer VAN BEMMELEN deelt het volgende mede:

In 1881 heeft DITTE een onderzoek gepubliceerd over het gedrag van 't dubbelzout $(K\ I)^2\ Pb\ I_2$ tegenover water, inzonderheid over de samenstelling der oplossingen, nevens welke dit zout onontleed kan bestaan. De beteekenis van het aanwezig zijn van eenen der componenten ($Pb\ I_2$ of K I) in vasten toestand nevens het dubbelzout en de oplossing, werd daarbij niet in het licht gesteld. Ook is de samenstelling van het zout, wat betreft het kristalwater, onzeker gebleven. Aangezien DITTE zijne methode van analyse niet mededeelt, en deze analyse verscheidene bezwaren oplevert, laat zich de graad van nauwkeurigheid zijner cijfers niet wel beoordeelen. De Heer F. SCHREINEMAKERS heeft in het anorganische scheikundig Laboratorium der Universiteit te Leiden een nieuw en uitvoerig onderzoek over dat onderwerp ingesteld.

De uitkomst van DITTE's proefnemingen komt hierop neder, dat bij elke T. de samenstelling der oplossing, nevens welke de dubbelzoutkristallen kunnen bestaan, eene andere is. Hij heeft dat bij temperaturen beneden 80° nagegaan voor het geval dat $Pb\ I_2$ in overmaat was.

Thans is het duidelijk, dat de kennis van het evenwicht tusschen dubbelzout en water eene studie vereischt van de samenstelling der vloeistoffen bij eene bepaalde temperatuur, met toepassing van den regel der phasen — zooals dit door Dr. BAKHUIS ROOZEBOOM het eerst is verricht bij zijne onderzoekingen omtrent de gashydraten, het chloorcalcium enz. Daaruit volgt reeds dadelijk, dat bij eene bepaalde temperatuur een standvastig evenwicht eerst bij aanwezigheid van vier phasen kan verkregen worden: dubbelzout, iodkalium (of iodlood), oplossing, en waterdamp — omdat hier drie stoffen, $Pb\ I_2$, K I en H_2O aanwezig zijn, en dat de overige evenwichten afhankelijk zijn van de massa der componenten. De Heer SCHREINEMAKERS heeft dit in aanmerking genomen en zijne proefnemingen tot 250° voortgezet.

Zijn onderzoek heeft geleerd: 1° dat, voor opvolgende temperaturen, de kromme lijnen van de oplosbaarheid van K I en van $Pb\ I_2$, bij aanwezigheid van vast dubbelzout

en vast K I, andere zijn dan die bij aanwezigheid van vast dubbelzout en vast Pb I_2; 2° dat die lijnen werkelijk de punten van standvastig evenwicht aangeven; 3° dat het eerste paar lijnen elkander snijdt bij 145°, en het tweede paar bij 205°. Bij die temperaturen worden dus de oplosbaarheden van die beide componenten aan elkander gelijk, namelijk bij 145°, indien dubbelzout en Pb I_2, — en bij 205° indien dubbelzout en K I — in de vaste phasen aanwezig zijn. Tusschen die beide temperaturen moet dan het dubbelzout zonder ontleding oplosbaar zijn. Werkelijk heeft de Heer S. zulks waargenomen. Beneden 145° moet zich Pb I_2, boven 205° moet zich K I afzetten, als het dubbelzout in water wordt opgelost, zooals door de waarneming bevestigd is *).

De uitkomsten laten zich voorstellen door het construeeren van een oppervlak met drie bladen. De 3 coordinaten zijn: de hoeveelheid opgelost Pb I_2, de hoeveelheid opgelost K I, de temperatuur. Op deze bladen liggen de punten die de samenstelling der vloeistof aangeven van onvolkomen evenwicht (drie phasen). Twee bladen snijden het derde volgens de lijnen, die de punten van standvastig evenwicht (vier phasen) vereenigen. In dit derde blad ligt de lijn der punten van onontlede oplosbaarheid van het dubbelzout. Het bijgaande model geeft daarvan eene aanschouwelijke voorstelling.

De samenstelling van het dubbelzout beantwoordt, volgens verschillende analysen, aan de formule: 5 mol. H_2O op 2 mol. dubbelzout. Ditte's samenstelling is onjuist, en berust trouwens slechts op eene enkele waterbepaling. Uit de waarnemingen is tot nog toe niet gebleken, dat het dubbelzout beneden 205° gedehydrateerd wordt als het met de oplossing te zamen is. Dit punt blijft evenwel nog in onderzoek.

Het afzonderen der vloeistof van de kristallen, bij tem-

*) Een smeltpunt van het dubbelzout, waarbij zout en oplossing gelijke samenstelling verkrijgen, is niet waargenomen, hetzij dat het niet bestaanbaar is, hetzij dat vóór dien tijd het dubbelzout zich dehydrateert. Dit punt is nog in onderzoek.

peraturen boven het kookpunt derzelve, ten einde de oplossing te kunnen analyseeren, bood eigenaardige moeielijkheden, welke gelukkig overwonnen zijn. Ook in het vinden eener methode, waardoor de groote hoeveelheden $Pb\,I_2$ en K I, in de oplossing aanwezig, met voldoende nauwkeurigheid quantitatief konden bepaald worden, is de Heer S. geslaagd.

— De Heer SURINGAR levert eene nieuwe (derde) bijdrage tot de kennis der *Melocacti* van West-Indië; hij bespreekt enkele punten uit de anatomie van het geslacht, van welke zijn leerling J. VAN BREDA DE HAAN, met behulp van het aanwezige materiaal, eene revisie leverde, nedergelegd in het academisch proefschrift, waarop hij te Leiden den doctoralen graad verwierf. Hij bespreekt verder de kenmerken van een Melocactus van Brazilië, door SCHUMANN in de Flora Brasiliensis als *M. violaceus* PFEIFF. beschreven, en van een nieuwe soort van Portorico, door spreker *M. Portoricensis* genoemd, beide in verband met hetgeen door hem vroeger aangaande de verhouding tusschen de kenmerken en de geographische verspreiding der soorten is opgemerkt. Hij legt daarbij eene kaart over, die het plantengeographisch gebied der Melocacti aanwijst en waarin statistieke opgaven betreffende de verspreiding der soorten, tot de verschillende hoofdrubrieken behoorende, tot een gemakkelijk overzicht zijn aangeteekend.

Een uittreksel van het gesprokene wordt aangeboden voor het Proces-Verbaal.

— De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM doet enkele mededeelingen over de samenstelling van het zeewater nabij de Hollandsche kust tusschen ter Heyde en Scheveningen.

Bij gelegenheid van het onderzoek, aan hem in vereeniging met de Heeren DE BRUYN, hoofdingenieur bij den Waterstaat, en BERNELOT MOENS, kapt. luit. ter zee, door het Haagsche Gemeentebestuur opgedragen in zake de spuikwestie, werden een groot aantal monsters zeewater in de nabijheid der kust verzameld, waarvan met zekerheid bekend was, dat zij niet met spuiwater verontreinigd waren.

Uit dit onderzoek is bij vernieuwing gebleken de groote veranderlijkheid van het zoutgehalte binnen 500 M. uit de kust, door den invloed van het zoete water dat uit den Rotterdamschen waterweg stroomt. Vond Prof. MULDER in 1850 reeds eene afwisseling in het soortelijk gewicht van 1.0124—1.0234 en Dr. KOPPESCHAAR in 1889 van 1.0146—1.0241, in den zomer van 1890 werd als minimum 1.0103 en als maximum 1.0241 gevonden. Terwijl in den regel die afwisselingen in de nabijheid van Scheveningen tamelijk geleidelijk zijn, treden enkele malen vrij plotselinge veranderingen op. Het sterkste voorbeeld werd op 6 Sept. 1890 aangetroffen nabij het Ververschingskanaal, waar in den tijd van 1 u. 20 min. het s. g. van 1.0220 op 1.0103 daalde.

Van een groot aantal der monsters water is het gehalte aan ammonia bepaald. Omtrent het voorkomen van dit bestanddeel in zeewater was tot dusverre nagenoeg niets bekend. In de meerderheid der onderzochte monsters kon met NESSLER's reagens geene ammonia worden aangetoond. In de overige monsters werd zelden meer dan 0.1 milligram NH_3 per liter gevonden, terwijl als maximum 0.4 milligram per liter is aangetroffen.

Verder is het gehalte aan opgeloste organische stoffen nagegaan, door bepaling der oxydeerbaarheid met kaliumpermanganaat. Het bleek dat de hoeveelheden van dit oxydatiemiddel, benoodigd voor normaal zeewater, bijzonder gering zijn.

Als uiterste grenzen werden gevonden 2 en 7 milligram per liter. Indien men mocht aannemen, dat de aard dier organische stoffen overeenstemt met de organische stoffen in grachtwater, dan zouden deze cijfers wijzen op de dubbele hoeveelheden organische bestanddeelen.

Ten aanzien dezer stoffen bleek voorts, dat de zuiverheid van het zeewater, van ter Heyde tot Scheveningen, eenigszins afnam.

Gedurende korten tijd kan het zeewater nabij het strand nu en dan veel onzuiverder zijn, ten gevolge van het aanspoelen van, in vergelijking tot het zeewater, zeer onzuivere

streepen schuim, die dikwijls de afscheiding vormen van lagen bijzonder zoet water. Zoo werd in eene dergelijke schuimstrook op 6 Sept. gevonden 8 mgr. NH_3 en zooveel organische stof dat daarvoor noodig was 146 mgr. $KMnO_4$ per liter.

Verder is nog de aandacht gewijd aan de zwevende bestanddeelen in het zeewater. De hoeveelheid slib, daarin voorkomende, wisselt zeer sterk. Soms is zij nauwelijks te bepalen, soms ziet het water grijsachtig tengevolge der groote hoeveelheid. In het laatste geval noemen de Scheveningers het water *dalig*. De slib zelve noemen zij *daal*.

Die daal bleek bij onderzoek, door Prof. v. Bemmelen verricht, in samenstelling overeen te komen met vette klei, zooals die afgezet gevonden is in Dollard, Zuiderzee en IJ.

	4.25	pCt.	vochtigheid.
±	11.	»	organische stoffen.
	19.6	»	koolzure kalk.
	8.	»	grof zand.
	23.	»	fijn »
	33.5	»	eigenlijke klei.

Hoe geringer de hoeveelheid slib, hoe grooter haar gehalte aan organische stof, bij hoeveelheden van 60 mgr. per liter en daarboven was de samenstelling zeer constant.

In 63 pCt. van de onderzochte monsters was de hoeveelheid slib beneden 30 milligram per liter. De kleinste hoeveelheid, die gevonden werd, was 4, de grootste 245 milligram. Uit de waarnemingen blijkt duidelijk, dat de grootere hoeveelheden slib tijdelijk opgeroerd worden door de branding.

— De Heer Martin biedt eene tweede bijdrage aan betrekkelijk de geologische gesteldheid van den bodem van Nederland, getiteld: »Geologische waarnemingen aan het Merwedekanaal tusschen Utrecht en Amsterdam", geschreven door Dr. J. Lorié.

— Voor de boekerij der Akademie wordt aangeboden

door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM het door hem en de Heeren H. E. DE BRUYN en H. BERNELOT MOENS, uitgebrachte rapport »over de loozing in zee door het waterververschingskanaal te Scheveningen, gedurende de zomermaanden", en eenige daaruit voortgevloeide vragen, tot de Commissie gericht door den Gemeenteraad van 's Gravenhage.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

OVER KROMMINGSKEGELSNEDEN VAN VLAKKE KROMME LIJNEN,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Het middelpunt van elke door de vier hoekpunten van een willekeurig trapezium gaande kegelsnede ligt op de lijn door de middens van de beide evenwijdige zijden. Denkt men zich dus deze vier hoekpunten als de uiteinden van twee in eene willekeurige vlakke kromme op oneindig kleine afstanden van de tweede orde evenwijdig aan eene van hare raaklijnen getrokken koorden, zoodat deze punten als vier opeenvolgende punten der kromme te beschouwen zijn, dan hebben onder anderen de beide door deze vier punten gaande kegelsneden, waarvan de eene door het onmiddellijk voorafgaande, de andere door het onmiddellijk volgende, punt der kromme als vijfde punt bepaald is, hare middelpunten op de lijn der middens van beide koorden. En daar deze lijn ook het punt bevat alwaar, zoodra men niet meer op oneindig kleinen behoeft te letten, de zes beschouwde punten der kromme kunnen geacht worden allen zamen te vallen, is hiermede aangetoond dat de meetkundige plaats der middelpunten van alle kegelsneden die ieder eene vijfpuntige aanraking met eene willekeurige kromme hebben, tot raaklijnen heeft de lijnen uit ieder zoodanig middelpunt telkens naar het bijbehoorende punt der kromme zelve getrokken.

Tot hetzelfde besluit komt men ook, door zich twee opvolgende van zoodanige kegelsneden te denken als hebbende vier opeenvolgende raaklijnen der kromme gemeen, en door

dan de stelling van NEWTON toe te passen volgens welke de middelpunten van alle, vier gegeven lijnen rakende, kegelsneden liggen op de lijn der middens van de drie diagonalen van hare volledige vierzijde; welke lijn ook hier weder het punt der kromme bevat alwaar de zes snijpunten der vier twee aan twee beschouwde opvolgende raaklijnen kunnen geacht worden zamen te vallen.

(Zie over dit een en ander ook SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, 2e Auflage, 1882, blz. 467—469, art. 386—387, alwaar de hoek, dien de lijn uit het beschouwde punt der kromme naar het middelpunt der bijbehoorende kegelsnede maakt met de normaal der kromme, genoemd wordt de afwijking, de vermelde lijn zelve de as der afwijking, het middelpunt der kegelsnede het afwijkingsmiddelpunt; terwijl in eenige hieronder nog nader aan te halen artikels in het Engelsche tijdschrift *Nature*, Vol. XXXVIII, May 1888 to October 1888, op blz. 173, 197, 318—319, 564—565 en 619, de meetkundige plaats der middelpunten van de kegelsneden onder den naam van afwijkingskromme voorkomt).

In plaats van voor eene gegeven kromme regtstreeks de vergelijking der vijfpuntig rakende kegelsnede op te maken, zullen wij eerst, in verband met het even gevondene, den algemeenen vorm der vergelijking van zoodanige kegelsneden zoeken, die ieder voor zich slechts drie opvolgende punten met de kromme gemeen hebben, maar zich toch zóó aaneenschakelen dat ook in dit geval de meetkundige plaats harer middelpunten omhuld wordt door de telkens bijbehoorende middellijnen. Wij plaatsen dit meer algemeene geval te eerder op den voorgrond, omdat het blijkbaar niet alleen het geval van den kromtecirkel moet omvatten, maar tevens het overeenkomstige geval van vierpuntige kegelsnede-aanraking, hetgeen, wat wel opmerkelijk is, zal blijken niet zelfstandig, maar slechts als noodwendig ook vijfpuntige raking medebrengende, te kunnen voorkomen.

Zij dan op regthoekige coördinaten-assen (x, y) een willekeurig punt van eene gegeven kromme; laten p, q, r, s en t de vijf eerste differentiaalquotienten van y naar x voorstel-

len, en A eenige, hetzij regtstreeks in x alleen, hetzij ook in de overige genoemde veranderlijken uitgedrukte functie van x; deze functie A hebbe overigens A_1 en A_2 tot eerste en tweede differentiaalquotient naar x. Voor X en Y als loopende coördinaten kan dan de bij (x, y) behoorende middellijn der kegelsnede zijn $A(X-x) + (Y-y) = 0$; haar middelpunt, zoowel op deze lijn als op de overeenkomstige voor de onmiddellijk volgende kegelsnede moetende liggen, moet dus aan deze vergelijking en aan hare afgeleide voor x, y en A als veranderlijken, dat is aan $A_1(X-x) - (A+p) = 0$, voldoen; zoodat, als (α, β) dat middelpunt voorstelt, men uit deze beide vergelijkingen oplost $\alpha = x + \frac{A+p}{A_1}$, $\beta = y - \frac{A(A+p)}{A_1}$.

Om nu in het algemeen de vergelijking op te maken van eenige uit dit middelpunt beschreven kegelsnede rakende de gegeven kromme in het punt (x, y), merke men op dat deze kegelsnede ook in het diametraal overstaande punt $\left(2\alpha - x = x + \frac{2(A+p)}{A_1},\ 2\beta - y = y - \frac{2A(A+p)}{A_1}\right)$ eene evenwijdige raaklijn moet hebben. Daar die kegelsnede alzoo de evenwijdige lijnen $p(X-x) - (Y-y) = 0$ en $p\left\{X - x - \frac{2(A+p)}{A_1}\right\} - \left\{Y - y + \frac{2A(A+p)}{A_1}\right\} = 0$ of $A_1\{p(X-x) - (Y-y)\} - 2(A+p)^2 = 0$ tot raaklijnen en de middellijn $A(X-x) + (Y-y) = 0$ tot bijbehoorende raakkoorde heeft, wordt hare vergelijking gevonden door van een willekeurig veelvoud van het vierkant dezer laatste vergelijking het product der beide eerste vergelijkingen af te trekken. Maar verlangt men nu meer in het bijzonder dat de bedoelde kegelsnede in (x, y) niet alleen twee, maar drie opvolgende punten, dus niet alleen de raaklijn, maar ook den kromtecirkel, met de gegeven kromme gemeen zal hebben, dan moet voor het willekeurige veelvoud bepaaldelijk het q-voud genomen worden, omdat alleen in dat geval aan de alsdan komende vergelijking

$$q\{A(X-x) + (Y-y)\}^2 - A_1\{p(X-x) - (Y-y)\}^2 + \\ + 2(A+p)^2\{p(X-x) - (Y-y)\} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

— waaraan, ook al ware daarin in plaats van q een andere willekeurige coëfficient gesteld, naar behooren steeds niet alleen het punt $X = x$, $Y = y$, maar ook tot in de eerste orde het opvolgende punt $X = x + dx$, $Y = y + p\,dx$ der raaklijn voldoet — bovendien tot in de tweede orde door het punt $X = x + dx$, $Y = y + p\,dx + \frac{q}{2}dx^2$ der kromme zelve voldaan wordt, en omdat dus alleen in dat geval deze kegelsnede (1) eene raking van de tweede orde met de gegeven kromme heeft.

Het is te voorzien dat de kegelsnede (1) en de onmiddellijk volgende van dezelfde soort, uithoofde zij in het punt (x, y) eene gemeenschappelijke raaklijn en tevens langs elkander vallende middellijnen hebben, bovendien twee al of niet bestaanbare snijpunten op eene lijn evenwijdig aan deze raaklijn zullen opleveren. Wenscht men deze lijn nader te bepalen, dan heeft men, ter bekorting de notatiën $P = p(X-x)-(Y-y)$ en $Q = A(X-x) + (Y-y)$ invoerende, de vergelijking (1) of $q\,Q^2 - A_1 P^2 + 2(A+p)^2 P = 0$ in verband te brengen met hare afgeleide $r\,Q^2 + 2q\,Q\frac{dQ}{dx} -$

$$-2\{A_1 P - (A+p)^2\}\frac{dP}{dx} - A_2 P^2 + 4(A+p)(A_1+q)P = 0,$$

waarin namelijk, omdat X en Y ten deze als standvastig te beschouwen zijn, $\frac{dP}{dx} = q(X-x) = \frac{q(P+Q)}{A+p}$ en $\frac{dQ}{dx} =$

$$= A_1(X-x) - (A+p) = \frac{A_1(P+Q)}{A+p} - (A+p), \text{ dus}$$

$$(A+p)\Big[2qQ\frac{dQ}{dx} - 2\{A_1 P - (A+p)^2\}\frac{dP}{dx}\Big] = 2qQ\{A_1(P+Q) - (A+p)^2\} -$$

$$-2q(P+Q)\{A_1 P - (A+p)^2\} = 2qA_1 Q^2 - 2qA_1 P^2 + 2q(A+p)^2 P$$

te nemen is, zoodat die afgeleide wordt $\{(A+p)r + 2qA_1\}\,Q^2 -$
$-\{(A+p)A_2 + 2qA_1\}P^2 + 2(A+p)^2(2A_1 + 3q)P = 0.$
En daar nu, door tusschen deze en de oorspronkelijke vergelijking $q\,Q^2 - A_1 P^2 + 2(A+p)^2 P = 0$ de termen in Q^2 te elimineren, de uitkomst zich laat splitsen in twee lineaire factoren in X en Y, namelijk vooreerst

$P = 0$, dat is de gemeenschappelijke raaklijn zelve, ten andere

$$\{(A + p)(r A_1 - q A_2) + 2q A_1 (A_1 - q)\} P -$$
$$- 2(A + p)^2 \{(A + p) r - 3 q^2\} = 0, \quad . \; . \; . \; (2)$$

dat is eene lijn evenwijdig aan deze raaklijn, zoo is werkelijk deze laatste lijn degene die de beide snijpunten der twee opvolgende kegelsneden bevat.

Alvorens tot de twee reeds vermelde toepassingen, namelijk den kromtecirkel en de kegelsnede van vier- en vijfpuntige aanraking, over te gaan, staan wij een oogenblik stil bij het geval waarin de kegelsneden (1) van driepuntige raking allen een gemeenschappelijk of vast middelpunt ($\alpha = c$, $\beta = d$) hebben. Daartoe moet de functie A voldoen aan $A(x-c) + (y-d) = 0$, zoodat men, door c en d tusschen deze vergelijking en hare twee eerste afgeleiden, namelijk $A_1(x-c)+(A+p) = 0$ en $A_2(x-c)+(2A_1+q) = 0$, te elimineren, ook als differentiaalvoorwaarde daartoe verkrijgt

$$A_1(2A_1 + q) - (A + p) A_2 = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Vooreerst gaan daardoor de differentialen der algemeene coördinaten van het middelpunt, namelijk $d\alpha = d\left\{x + \frac{A+p}{A_1}\right\} = \frac{A_1(2A_1+q)-(A+p)A_2}{A_1^2} dx$ en $d\beta = d\left\{y - \frac{A(A+p)}{A_1}\right\} = -A\frac{A_1(2A_1+q)-(A+p)A_2}{A_1^2} dx$, die naar behooren steeds aan $\frac{d\beta}{d\alpha} = -A = \frac{y-\beta}{x-\alpha}$ voldoen, werkelijk in nul over. Ten andere vereenvoudigt zich de vergelijking (2) der snijlijn, door daarin thans $(A + p) A_2 = A_1(2A_1 + q)$ te substitueren, tot $A_1 P - 2(A + p)^2 = 0$ en valt deze lijn dus naar behooren zamen met de reeds boven beschouwde, thans gemeenschappelijke, raaklijn in het diametraal over (x, y) staande punt. En ten derde blijkt de vergelijking (1)

der kegelsnede zelve, indien men daarin $A = -\frac{y-d}{x-c}$ neemt en de coördinatenassen volgens $X' = X-c$ en $Y' = Y-d$ evenwijdig naar het middelpunt verlegt, thans als middelpuntsvergelijking op te leveren $q\{(y-d)X' - (x-c)Y'\}^2 + \{p(x-c) - (y-d)\}(pX' - Y')^2 - \{p(x-c) - (y-d)\}^3 = 0$.

Terwijl in het algemeen de kegelsnede (1) voor het beschouwde punt (x, y) eene ellips, parabool of hyperbool zal zijn naarmate $(qA + A_1 p)^2 - (qA^2 - A_1 p^2)(q - A_1)$, dat is $qA_1(A+p)^2$, aldaar eene negatieve, verdwijnende of positieve waarde heeft, wordt zij allenn dán een cirkel wanneer aan de dubbele voorwaarde $qA^2 - A_1 p^2 = q - A_1$ en $qA + A_1 p = 0$ voldaan wordt. Verlangt men dat dit in ieder punt der kromme het geval zal wezen, dan vordert deze laatste voorwaarde door integratie dat het product pA eene standvastige waarde hebbe, die dan, door de eerste voorwaarde te schrijven onder den vorm $qA(A+p) = \frac{q}{p}(p+A)$, blijkt niet anders dan de eenheid te kunnen zijn. Derhalve $A = \frac{1}{p}$, waardoor de in het algemeen aangenomen middellijn $A(X-x) + (Y-y) = 0$ overgaat in de normaal $\frac{1}{p}(X-x) + (Y-y) = 0$ der kromme. Men wordt hierdoor alzoo tot den kromtecirkel als den eenigen cirkel door drie opvolgende punten teruggebragt; en terwijl dan ook door $A_1 = -\frac{q}{p^2}$ en $A_2 = -\frac{pr - 2q^2}{p^3}$ de algemeene coördinaten van het middelpunt overgaan in de bekende $\alpha = x - \frac{p(1+p^2)}{q}$ en $\beta = y + \frac{1+p^2}{q}$ van het kromtemiddelpunt en de vergelijking (1) zelve in de vergelijking $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = \frac{(1+p^2)^3}{q^2}$ van den kromtecirkel, wordt in de vergelijking (2) van de gemeenschappelijke koorde van dezen kromtecirkel met den onmiddellijk volgenden de coëfficient van P in dit geval

gelijk nul, zoodat die koorde naar eisch in het oneindige verdwijnt, en gaat tevens de als voorwaarde voor een gemeenschappelijk middelpunt gevonden betrekking (3) over in $(1+p^2)r-3pq^2=0$, die als differentiaalvergelijking van $\frac{(1+p^2)^3}{q^2}=$ standvastig, dat is van den algemeenen cirkel, uitwijst dat dit geval hier slechts dán voorkomt wanneer de beschouwde kromme zelve een cirkel is. (Tot diezelfde differentiaalvergelijking zou men evenzeer komen door ook in de zoo dadelijk voor de vijfpuntige kegelsnede te vinden waarde $A+p=\frac{3q^2}{r}$ te vorderen $A=\frac{1}{p}$.)

Thans overgaande tot de bepaling van die bijzondere kegelsnede van de soort (1) die eene vierpuntige aanraking met de gegeven kromme vertoont — welke bepaling men ook zonder de hierboven ingelaschte beschouwingen onmiddellijk op (1) zelve had kunnen doen volgen — heeft men de functie A zóó te regelen dat als men in de vergelijking (1) thans substitueert $X=x+dx$, $Y=y+p\,dx+\frac{q}{2}dx^2+$ $+\frac{r}{6}dx^3+\frac{s}{24}dx^4$, waardoor zooals vroeger werd opgemerkt van zelf reeds de termen tot in de tweede orde verdwijnen, bovendien de termen der derde orde zich tot nul herleiden. Daartoe verkrijgt men bij ontwikkeling van

$$q\left\{(A+p)dx+\frac{q}{2}dx^2+\frac{r}{6}dx^3+\frac{s}{24}dx^4\right\}^2-A_1\left\{\frac{q}{2}dx^2+\frac{r}{6}dx^3+\right.$$

$$\left.+\frac{s}{24}dx^4\right\}^2-2(A+p)^2\left\{\frac{q}{2}dx^2+\frac{r}{6}dx^3+\frac{s}{24}dx^4\right\}=0$$ voor

deze termen en voor die der vierde orde: $\left\{(A+p)q^2-\right.$

$$\left.-\frac{(A+p)^2r}{3}\right\}dx^3+\left[q\left\{\frac{(A+p)r}{3}+\frac{q^2}{4}\right\}-\frac{A_1q^2}{4}-\frac{(A+p)^2s}{12}\right]dx^4,$$

zoodat de gelijk nul gestelde coëfficient van dx^3 — wiens factor $A+p=0$ blijkbaar geene eigenlijke oplossing zou geven — voor het tegenwoordige doel de waarde $A+p=\frac{3q^2}{r}$

doet kennen, welke, in verband met de daaruit volgende $A_1 = \frac{q(5r^2-3qs)}{r^2}$, echter tegelijk den coëfficient van dx^4 tot nul blijkt te herleiden. Dit strekt ten bewijze van de reeds in den aanhef vermelde bijzonderheid dat de alzoo gevonden kegelsnede van vierpuntige aanraking — en die altijd, wel te verstaan, tot de soort behoort wier middelpunt tot de omschreven omhulling aanleiding geeft — namelijk

$$\{(3q^2-pr)(X-x)+r(Y-y)\}^2-(5r^2-3qs)\{p(X-x)-\\-(Y-y)\}^2+18q^3\{p(X-x)-(Y-y)\}=0,$$

tevens juist de kegelsnede is die vijf opeenvolgende punten met de kromme gemeen heeft.

Voor de coördinaten van haar middelpunt, dat is van het bij (x, y) behoorende punt (α, β) der reeds bovengenoemde afwijkingskromme, heeft men door in de algemeene α en β de tegenwoordige waarden van $A+p$ en A_1 te substitueren: $\alpha = x + \frac{3qr}{5r^2-3qs}$ en $\beta = y - \frac{3q(3q^2-pr)}{5r^2-3qs}$. Voor de gemeenschappelijke koorde (2) met de opvolgende vijfpuntige kegelsnede komt thans eenvoudig $P=0$, dat is zij valt in dit geval (en ook in geen ander) met de gemeenschappelijke raaklijn zamen, zooals behoort wegens de vier opvolgende gemeene punten. Voor de voorwaarde (3) dat de verschillende kegelsneden een zelfde middelpunt hebben, dat is thans dat de afwijkingskromme zich tot een enkel punt bepale, komt wegens $A_1(2A_1+q)-(A+p)A_2 = \frac{q(5r^2-3qs)}{r^2}.\frac{q(11r^2-6qs)}{r^2}-\frac{3q^2}{r}.\frac{r(5r^3-6qrs-3q^2t)+6q^2s^2}{r^3}= \frac{q^2(9q^2t-45qrs+40r^3)}{r^3}$, als men in overeenstemming met de reeds aangehaalde blz. 173 van *Nature* de notatie $T = 9q^2t - 45qrs + 40r^3$ invoert, de voorwaarde $T=0$, die trouwens ook zonder (3) zou gevonden zijn door er van uit te gaan dat daartoe de gegeven kromme zelve eene kegelsnede moet wezen, dat dus hare vijfpuntig rakende kegelsnede dan tevens een zesde punt gemeen moet hebben,

en dat daartoe nu ook de coëfficient van dx^5 in de als boven ontwikkelde vergelijking (1), dat is de coëfficient $q\left\{\frac{(A+p)s}{12}+\frac{qr}{6}\right\}-\frac{A_1 q r}{6}-\frac{(A+p)^2 t}{60}$, gelijk nul moet zijn. (Zelfs de coëfficienten van de nog hoogere magten van dx in dezelfde ontwikkeling zouden, door T en diens opvolgende afgeleiden gelijk nul te substitueren, blijken zich naar behooren ook tot nul te herleiden.)

De voor A gevonden waarde geeft voor de tangens van de afwijking δ, dat is voor de cotangens van den hoek dien de door $-A$ als rigtingscoëfficient bepaalde middellijn maakt met de raaklijn der kromme, de formule

$$tang\,\delta=\frac{1-Ap}{-A-p}=\frac{r-p(3q^2-pr)}{-3q^2}=\frac{3pq^2-(1+p^2)r}{3q^2},$$

die ook ter aangehaalde plaats bij SALMON-FIEDLER voorkomt, en gelijk nul gesteld nogmaals tot de boven reeds vermelde differentiaalvergelijking van den cirkel terugvoert. En — hetgeen den hoofdinhoud vormt van de in den aanhef dezes genoemde artikels in *Nature* — niet alleen drukt de voorwaarde $T=0$ uit dat de kromtestraal van de afwijkingskromme gelijk nul wordt voor ieder punt van eene willekeurige kegelsnede; maar ook, indien men voor de vijfpuntig rakende kegelsnede in eenig punt van eene willekeurige kromme de waarde bepaalt van eenige grootheid die voor alle punten van eene zelfde kegelsnede dezelfde beteekenis heeft, zal de differentiaal van deze waarde bij den overgang tot het volgende punt der kromme steeds den vorm T tot factor hebben. Dit blijkt in de eerste plaats natuurlijk reeds ten opzigte van de boven in het algemeen opgemaakte differentialen der coördinaten van het middelpunt der kegelsnede, waarvoor thans meer in het bijzonder komt $d\alpha=\frac{A_1(2A_1+q)-(A+p)A_2}{A_1^2}dx=\frac{rT}{(5r^2-3qs)^2}dx$ en $d\beta=-A\,d\alpha=-\frac{(3q^2-pr)T}{(5r^2-3qs)^2}dx$. En wil men zich door een ander voorbeeld van het gezegde vergewissen, dan kan daartoe als volgt de bepaling dienen van het product en van de som der vierkanten van de halve assen der

kegelsnede, die beiden gemakkelijk voortvloeijen uit de kennis der halve middellijn a van het beschouwde punt (x, y) en der halve toegevoegde middellijn b. Met betrekking tot de algemeene vergelijking (1) heeft men onmiddellijk $a^2=(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=\frac{(1+A^2)(A+p)^2}{A_1^2}$ en vindt men, door de uiteinden $X=\alpha\pm\frac{b}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Y=\beta\pm\frac{bp}{\sqrt{(1+p^2)}}$ der toegevoegde middellijn aan (1) te laten voldoen en daarbij op $A(\alpha-x)+(\beta-y)=0$ en $p(\alpha-x)-(\beta-y)=\frac{(A+p)^2}{A_1}$ te letten, $b^2=-\frac{(1+p^2)(A+p)^2}{qA_1}$, terwijl de sinus van den hoek dezer toegevoegde middellijnen tot waarde verkrijgt $\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan g^2\delta)}}=-\frac{A+p}{\sqrt{(1+A^2)(1+p^2)}}$. Derhalve wordt de inhoud van den regthoek der halve assen gelijk $I=ab\cos\delta=\frac{(A+p)^3}{q^{\frac{1}{2}}(-A_1)^{\frac{3}{2}}}$, waarvan de logarithmische differentiaal is $\frac{dI}{I}=\left\{\frac{3(A_1+q)}{A+p}-\frac{r}{2q}-\frac{3}{2}\frac{A_2}{A_1}\right\}dx=$

$$=\frac{3q\{A_1(2A_1+q)-(A+p)A_2\}+A_1\{3q^2-(A+p)r\}}{2(A+p)qA_1}dx,$$

zoodat men thans, voor A, A_1 en A_2 hare waarden substituerende, vindt $I=\frac{27q^4}{(3qs-5r^2)^{\frac{3}{2}}}$ met $dI=-\frac{TI}{2q(3qs-5r^2)}dx$.

En wat betreft de som der vierkanten van de halve assen, welke gelijk is aan die voor de halve middellijnen a en b, heeft men in het algemeen $\frac{A_1^3d(a^2)}{2(A+p)dx}=$

$$=A_1\{(1+A^2)(A_1+q)+AA_1(A+p)\}-(1+A^2)(A+p)A_2=$$
$$=(1+A^2)\{A_1(2A_1+q)-(A+p)A_2\}+A_1^2(Ap-1) \text{ en}$$
$$\frac{q^2A_1^2\,d(b^2)}{(A+p)dx}=-qA_1\{2(1+p^2)(A_1+q)+2(A+p)pq\}+$$
$$+(1+p^2)(A+p)(qA_2+rA_1)=-q(1+p^2)\{A_1(2A_1+q)-$$
$$-(A+p)A_2\}-A_1(1+p^2)\{3q^2-(A+p)r\}-2q^2A_1(Ap-1),$$

waarvan de som der producten met $2q^2$ en A_1 geeft

$\frac{q^2 A_1^3 d(a^2+b^2)}{(A+p)\,dx} = \{2q^2(1+A^2)-q(1+p^2)A_1\}\,\{A_1(2A_1+q)-$ $-(A+p)A_2\} - A_1^2(1+p^2)\{3q^2-(A+p)r\}$, zoodat men, door nu weder voor A, A_1 en A_2 de waarden te substitueren, nederkomt op $a^2+b^2 = \frac{9q^2\{(3q^2-pr)^2+r^2+(1+p^2)(3qs-5r^2)\}}{(3qs-5r^2)^2}$ met $d(a^2+b^2) = -\frac{2a^2+b^2}{3q(3qs-5r^2)}\,T\,dx$. Zooals gezegd, blijken dus onder anderen de differentialen van α, β, I en a^2+b^2 voor de vijfpuntig rakende kegelsnede allen werkelijk den gemeenschappelijken factor T te bevatten.

Voor eenig punt (x, y) van eene gegeven kromme werden boven als coördinaten van het overeenkomstige punt der afwijkingskromme gevonden $\alpha = x + \frac{3qr}{5r^2-3qs}$ en $\beta = y - \frac{3q(3q^2-pr)}{5r^2-3qs}$. Door tusschen deze beiden, uitgedrukt in x, deze veranderlijke te elimineren, zal alzoo de vergelijking der afwijkingskromme zelve komen. Moeijelijker schijnt in het algemeen de oplossing van het omgekeerde vraagstuk, namelijk de bepaling van de oorspronkelijke kromme die tot eene gegeven afwijkingskromme aanleiding geeft. Men kan zich daartoe die afwijkingskromme (α, β) volgens de algemeene formulen ven MONGE — als f eene willekeurige functie van eenige veranderlijke φ, en f_1 en f_2 de beide eerste afgeleiden dier functie voorstellen — uitgedrukt denken door het stelsel $\alpha = f\sin\varphi + f_1\cos\varphi$, $\beta = -f\cos\varphi + f_1\sin\varphi$, waaruit onder anderen volgt $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{(f+f_2)\sin\varphi\, d\varphi}{(f+f_2)\cos\varphi\, d\varphi} = tang\,\varphi$ en $\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)} = (f+f_2)\,d\varphi$; voert men dan als onbekende den afstand a in, die, gerekend van het punt (α, β), op de raaklijn van dat punt wordt afgesneden door de oorspronkelijke kromme, dan zijn de coördinaten van het overeenkomstige punt dezer kromme $x = \alpha + a\cos\varphi$, $y = \beta + a\sin\varphi$, en dan heeft men, door

weder de notatiën $F = f + f_2$ (voorstellende dus den kromtestraal van de gegeven afwijkingskromme) met F_1 en F_2 als de twee eerste afgeleiden van F, en a_1, a_2 en a_3 als de drie eerste afgeleiden van a (allen ten opzigte van φ) in te voeren, $\frac{dx}{d\varphi} = (F + a_1)\cos\varphi - a\sin\varphi$ en $\frac{dy}{d\varphi} = (F + a_1)\sin\varphi + a\cos\varphi$. De berekening van de onbekende a zal nu gegrond moeten zijn op de toepassing van de als kenmerk van de vijfpuntig rakende kegelsnede en dus ook van de afwijkingskromme gevonden voorwaarde $A + p = \frac{3q^2}{r}$, waarin namelijk thans de uit de vergelijking $A(\alpha - x) + (\beta - y) = 0$ der middellijn van die kegelsnede — of, wat hetzelfde is, der raaklijn van de afwijkingskromme — te ontleenen coëfficient $A = -\frac{\beta - y}{\alpha - x} = -\frac{d\beta}{d\alpha} = -\tan g\,\varphi$ is, terwijl $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$ en $r = \frac{dq}{dx} = \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5}$ ook allen in φ als veranderlijke zijn uit te drukken. Daartoe $A + p = \frac{\cos\varphi\, dy - \sin\varphi\, dx}{\cos\varphi\, dx} = \frac{a\, d\varphi}{\cos\varphi\, dx}$, alsmede q en r substituerende in $(A + p)r - 3q^2 = 0$, komt $ad\varphi dx(dxd^3y - dyd^3x) -$
$- 3(dx\, d^2y - dy\, d^2x)\{a\, d\varphi\, d^2x + \cos\varphi(dx\, d^2y - dy\, d^2x)\} = 0$, of, lettende in den laatsten term op $a\, d\varphi - \cos\varphi dy = -\sin\varphi\, dx$ en dan overal door dx — welke factor gelijk nul gesteld blijkbaar geene eigenlijke oplossing zou geven — deelende, $ad\varphi(dxd^3y - dy\, d^3x) - 3(dx\, d^2y - dy\, d^2x)(-\sin\varphi\, d^2x + \cos\varphi\, d^2y) = 0$. Er blijft nu slechts over, hierin de bovenstaande waarden van $\frac{dx}{d\varphi}$ en $\frac{dy}{d\varphi}$ en de daaruit volgende

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = -(F + 2a_1)\sin\varphi + (F_1 - a + a_2)\cos\varphi\,,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = (F + 2a_1)\cos\varphi + (F_1 - a + a_2)\sin\varphi\,,$$

$$\frac{d^3x}{d\varphi^3} = -(F - F_2 + 3a_1 - a_3)\cos\varphi - (2F_1 - a + 3a_2)\sin\varphi$$

en

$$\frac{d^3 y}{d\varphi^3} = -(F - F_2 + 3\,a_1 - a_3)\sin\varphi + (2\,F_1 - a + 3\,a_2)\cos\varphi$$

te substitueren, om als differentiaalvergelijking van de derde orde ter bepaling van a te verkrijgen:

$$a\,(F + a_1)\,(2\,F_1 + 3\,a_2) - a^2\,(F_2 - 2\,a_1 + a_3) -$$
$$- 3\,(F + 2\,a_1)\,\{(F + a_1)(F + 2\,a_1) - a\,(F_1 - a + a_2)\} = 0.$$

De integratie hiervan, bij gegeven functie F, schijnt echter in het algemeen niet gemakkelijk.

Als toepassing bepalen wij de afwijkingskromme voor die kromme lijn, welke zoo merkwaardig is om de veelvuldige krommen van dezelfde soort waartoe zij op verschillende wijzen aanleiding geeft: de logarithmische spiraal. Gelet op de bijzonderheid dat zij als het ware te beschouwen is als eene aaneenschakeling van een oneindig aantal onderling gelijkvormige stukken allen met dezelfde pool, zal het wel niet verwonderen dat in dit geval ook de afwijkingskromme eene logarithmische spiraal met dezelfde pool is. Door berekening kan dit bij voorbeeld als volgt worden bevestigd. Zij, voor ω en ϱ als polaire coördinaten, voor e als Neperiaansche logarithmen-basis en voor C en μ als standvastigen, de kromme bepaald door het stelsel $\frac{x}{\cos\omega} = \frac{y}{\sin\omega} = \varrho = C e^{\omega \cot\mu}$, dan volgt hieruit door logarithmische differentiatie $\frac{d\varrho}{\varrho} = \cot\mu\, d\omega$, $\frac{dx}{x} = (-\tang\omega + \cot\mu)\, d\omega$ en $\frac{dy}{y} = (\cot\omega + \cot\mu)\, d\omega$, dat is $\frac{dx}{d\omega} = \frac{\varrho\cos(\omega + \mu)}{\sin\mu}$ en $\frac{dy}{d\omega} = \frac{\varrho\sin(\omega + \mu)}{\sin\mu}$. Derhalve wordt opvolgend $p = \frac{dy}{dx} = \tang(\omega + \mu)$, $q = \frac{dp}{dx} = \frac{\sin\mu}{\varrho\cos^3(\omega + \mu)}$ en $r = \frac{dq}{dx} =$

$= \sin^2\mu \dfrac{-\cot\mu\cos(\omega+\mu)+3\sin(\omega+\mu)}{\varrho^2\cos^5(\omega+\mu)}$ of, als men nu nog de notatie $\cot\mu = 3\cot\mu'$ invoert, $r = -\dfrac{3\sin^3\mu\cos(\omega+\mu+\mu')}{\varrho^2\cos^5(\omega+\mu)\sin\mu'}$.
Hierdoor wordt verder $3q^2-pr = \dfrac{3\sin^3\mu\sin(\omega+\mu+\mu')}{\varrho^2\cos^5(\omega+\mu)\sin\mu'}$, dus $A = \dfrac{3q^2-pr}{r} = -\operatorname{tang}(\omega+\mu+\mu')$ (in overeenstemming met de beteekenis van ω als polaire abscis, μ als hoek der kromme met den voerstraal en $90^0-\mu'$ als afwijking), en daaruit $5r^2-3qs = \dfrac{r^2}{q}A_1 = \dfrac{r^2}{q}\dfrac{dA}{dx} =$
$= -\dfrac{9\sin^4\mu}{\varrho^4\cos^8(\omega+\mu)\sin^2\mu'}$; met welke waarden ten slotte voor de coördinaten van het afwijkingsmiddelpunt komt

$$\alpha = x + \frac{3qr}{5r^2-3qs} = \varrho\left\{\cos((\omega+\mu')-\mu') + \frac{\cos((\omega+\mu')+\mu)\sin\mu'}{\sin\mu}\right\} =$$
$$= \varrho\cos(\omega+\mu').\ (\cos\mu' + \cot\mu\sin\mu') = 4\varrho\cos\mu'\cos(\omega+\mu')$$ en
$$\beta = y - \frac{3q(3q^2-pr)}{5r^2-3qs} = \varrho\left\{\sin((\omega+\mu')-\mu') + \frac{\sin((\omega+\mu')+\mu)\sin\mu'}{\sin\mu}\right\} =$$
$$= \varrho\sin(\omega+\mu').\ (\cos\mu' + \cot\mu\sin\mu') = 4\varrho\cos\mu'\sin(\omega+\mu').$$

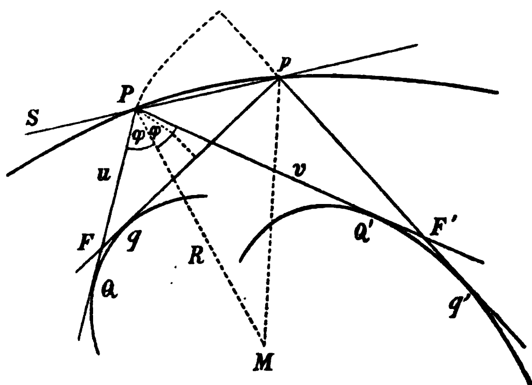
En daar bij deze regthoekige coördinaten de polaire $\omega' =$
$= \text{Boog tang}\ \dfrac{\beta}{\alpha} = \omega + \mu'$ en $\varrho' = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} = 4\varrho\cos\mu'$ behooren, zoo wordt door ω en ϱ te elimineren als afwijkingskromme de logarithmische spiraal $\varrho' = (4C\cos\mu' e^{-\mu'\cot\mu}) e^{\omega'\cot\mu}$ gevonden.

Door omgekeerd van eene logarithmische spiraal als gegeven afwijkingskromme (α, β) uit te gaan, zou blijken dat in dit geval aan de boven in het algemeen opgemaakte differentiaalvergelijking in a onder anderen eene waarde van a evenredig aan den voerstraal $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ voldoet, zoodat men ook dan eene soortgelijke kromme als oorspronkelijke terugvindt.

Op gevaar af van in herhaling te vallen van hetgeen

misschien reeds elders voorkomt — ik ben namelijk niet wel in de gelegenheid geweest hieromtrent een onderzoek in te stellen — voeg ik ten slotte hier nog iets bij over kegelsneden die ook ieder drie opvolgende punten met eene gegeven kromme gemeen hebben, maar waarvan nu niet de middelpunten, maar de beide brandpunten de bijzonderheid vertoonen dat hunne meetkundige plaats wordt aangeraakt door de telkens naar het overeenkomstige punt der kromme getrokken lijn.

Zij in nevenstaande figuur een onrekbaar koord geslagen



om twee willekeurige in één vlak gelegen krommen Qq en $Q'q'$, dan doorloopt eene stift P, die dit koord steeds gespannen houdt, zekere kromme Pp. Voor twee willekeurige punten P en p dier kromme is dan steeds $QP + PQ' +$ $+$ boog $Q'q' =$ boog $Qq + qp + pq'$. Maar is nu Pp, dus ook Qq en $Q'q'$, klein, dan is tot en met de tweede orde naauwkeurig *boog* $Qq = QF + Fq$ en $Q'F' + F'q' =$ *boog* $Q'q'$, zoodat dan de som dezer drie vergelijkingen geeft $FP + PF' =$ $= Fp + pF'$, ten blijke dat eene uit F en F' als brandpunten beschreven kegelsnede, gaande door P, slechts tot in de derde orde van het punt p zal afwijken, waaruit reeds besloten mag worden dat deze kegelsnede drie opvolgende punten met de kromme Pp gemeen zal hebben. Of, wil men dit nog op andere wijze aantoonen, dan denke men zich, voor P als een vast punt, p onbepaaldelijk tot P toenaderend, dus F en F' tot Q en Q', dan gaat de gemeen-

schappelijke koorde Pp over in de gemeenschappelijke raaklijn in P van de kromme en van eene uit Q en Q' beschreven kegelsnede, zoodat dan de normaal der kromme in P langs die van deze kegelsnede, dat is langs de deellijn van hoek QPQ' of, wat hetzelfde is, langs de deellijn van hoek FPF' valt. Maar, door omgekeerd het veranderlijk gedachte punt P tot het vaste punt p, dus F en F' tot q en q', te doen toenaderen, blijkt eveneens de normaal der kromme in p langs de deellijn van hoek qpq' of van hoek FpF' te vallen. De kromme en de kegelsnede uit F en F' hebben dus niet alleen ééne, maar twee opvolgende normalen gemeen. En bij den grensovergang blijken alzoo de kromme Pp en de uit de overeenkomstige punten Q en Q' als brandpunten beschreven kegelsnede telkens drie opvolgende punten gemeen te hebben, terwijl de meetkundige plaatsen Qq en $Q'q'$ der brandpunten van deze opvolgende kegelsneden telkens zooals bedoeld werd door de overeenkomstige verbindingslijnen QP en $Q'P$ worden aangeraakt.

Stelt men de voerstralen $QP = u$, $PQ' = v$, den kromtestraal $PM = pM = R$ en de hoeken $QPM = Q'PM = \varphi$, dan geeft de figuur: $SPM = \frac{1}{2}(SPF + SPF')$ en $SpM = = \frac{1}{2}(SpF + SpF')$, dus als verschil: $PMp = \frac{1}{2}(PFp + PF'p)$, waarvan de drie termen, opvolgend gedeeld door $R.PMp$, $\frac{u.PFp}{\cos\varphi}$ en $\frac{v.PF'p}{\cos\varphi}$ (die behoudens oneindig kleinen van hooger orde allen gelijk Pp zijn), de formule $\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\cos\varphi$ opleveren. Vooreerst moet deze formule dus ook gelden voor den kromtestraal en de beide voerstralen van een willekeurig punt eener kegelsnede. Ten andere bevestigt zij, door een zelfden kromtestraal te geven, het even gezegde omtrent de drie opvolgende aan eene kromme Pp en de kegelsnede uit Q en Q' gemeenschappelijke punten. En in de derde plaats heeft zij tevens beteekenis in de leer der catacaustische lijnen, want het is duidelijk dat Qq en $Q'q'$ ten opzigte van Pp als spiegelkromme voorkomen als een paar van aan elkander toegevoegde lijnen van die soort.

Ten aanzien van deze formule teekenen wij nog aan:

1° dat zij voor $R = \infty$ vordert $v = -u$, zoodat, als de spiegelkromme in eene regte lijn overgaat, de beide catacaustische krommen elkanders symmetrische ten opzigte van deze lijn zijn; 2° dat die beide krommen kunnen zamenvallen, en dan de ontwondene van de spiegelkromme vormen, als wanneer de lichtstralen normaal invallen en uitvallen, dus overal $\varphi = 0$ is met $R = u = v$. Ook kunnen de beide catacaustische krommen verschillende deelen van eene zelfde kromme zijn, waarvan men een voorbeeld heeft in het geval van een om eene ellips geslagen onrekbaar koord, waarvan de stift die het gespannen houdt alsdan eene homofocale ellips zal beschrijven. Komt eindelijk het geval voor, dat steeds $\varphi = QPM = qpM$ standvastig blijft, dan gaat de cirkel door M, P en p tevens door F en evenzeer door F'; men heeft dan $u = v = R \cos \varphi$, en de telkens onderling gelijke afstanden MQ en MQ' staan loodregt op PQ en PQ'.

Wij besluiten met het opmaken van de algemeene vergelijking van eene kegelsnede van de thans bedoelde soort. Daartoe gaan wij weder van een willekeurig punt P of (x, y) van eene gegeven kromme Pp uit en, terwijl wij als vroeger p en q de eerste en de tweede afgeleide van y naar x blijven noemen, stellen wij thans door k, die weder eene willekeurige functie van x kan zijn, de tangens van de gelijke hoeken $QPM = Q'PM = \varphi$ voor, die de raaklijnen PQ en PQ' van de meetkundige plaatsen der beide brandpunten met de normaal PM maken; k_1 zal overigens de afgeleide van k naar x beteekenen. De vergelijkingen van PQ en PQ' zijn dan zamen te vatten onder den vorm

$$Y - y = \frac{-\frac{1}{p} \mp k}{1 \mp \frac{k}{p}}(X - x) = \frac{1 \pm kp}{-p \pm k}(X - x),$$ zoodat voor het snijpunt telkens met de onmiddellijk volgende overeenkomstige lijnen pq en pq' door differentiatie bovendien

$$-p = -\frac{1 \pm kp}{-p \pm k} + (X - x)\frac{(-p \pm k)(\pm kq \pm k_1 p) - (1 \pm kp)(-q \pm k_1)}{(-p \pm k)^2}$$

moet wezen; en hieruit vindt men de coördinaten der beide

brandpunten Q en Q' bepaald door $X = x + \frac{(1+p^2)(-p \pm k)}{(1+k^2)q \mp (1+p^2)k_1}$, $Y = y + \frac{(1+p^2)(1 \pm kp)}{(1+k^2)q \mp (1+p^2)k_1}$. Nu blijkt verder geheel als vroeger dat in het algemeen de vergelijking eener overigens willekeurige kegelsnede die de gegeven kromme in (x, y) driepuntig raakt — maar dus thans niet bovendien, zooals bij (1) wél het geval was, gebonden is aan de voorwaarde omtrent de meetkundige plaats der middelpunten als omhullende van de overeenkomstige middellijnen — den vorm

$$\{A(X-x) + (Y-y)\}^2 - B\{p(X-x) - (Y-y)\}^2 + \\ + \frac{2(A+p)^2}{q}\{p(X-x) - (Y-y)\} = 0$$

moet hebben; en hierin zijn in het tegenwoordige geval de beide nog onbepaalde coëfficienten A en B te regelen door den eisch dat het thans door de gemiddelden van de evengevonden coördinaten der brandpunten, namelijk $X = x + \frac{(1+p^2)\{-(1+k^2)pq + (1+p^2)kk_1\}}{(1+k^2)^2 q^2 - (1+p^2)^2 k_1^2}$ en $Y = y + \frac{(1+p^2)\{(1+k^2)q + p(1+p^2)kk_1\}}{(1+k^2)^2 q^2 - (1+p^2)^2 k_1^2}$, bepaalde middelpunt aan de beide middellijnen $A(X-x) + (Y-y) = 0$ en $p(X-x) - (Y-y) = \frac{(A+p)^2}{Bq}$ moet voldoen. Zoodoende verkrijgt men de waarden $A = \frac{(1+k^2)q + p(1+p^2)kk_1}{(1+k^2)pq - (1+p^2)kk_1}$, dus $\frac{(A+p)^2}{q} = \frac{(1+k^2)^2(1+p^2)^2 q}{\{(1+k^2)pq - (1+p^2)kk_1\}^2}$, en $B = -\frac{(1+k^2)\{(1+k^2)^2 q^2 - (1+p^2)^2 k_1^2\}}{\{(1+k^2)pq - (1+p^2)kk_1\}^2}$, en is derhalve de bedoelde kegelsnede geheel bepaald. En wil men zich nu ten overvloede vergewissen dat zij werkelijk de twee gevonden punten tot brandpunten heeft, dan blijkt daartoe hare vergelijking ook geschreven te kunnen worden als volgt:

$$q^2(1+p^2)(1+k^2)^3\left[\left\{X-x-\frac{(1+p^2)(-p\pm k)}{(1+k^2)q\mp(1+p^2)k_1}\right\}^2+\right.$$

$$+\left.\left\{Y-y-\frac{(1+p^2)(1\pm kp)}{(1+k^2)q\mp(1+p^2)k_1}\right\}^2\right]-$$

$$-\left[\{qk(1+k^2)-p(1+p^2)k_1\}(X-x)+\{pqk(1+k^2)+\right.$$

$$\left.+(1+p^2)k_1\}(Y-y)\mp\frac{q(1+p^2)^2(1+k^2)^2}{(1+k^2)q\mp(1+p^2)k_1}\right]^2=0,$$

waarin dus tevens de laatste term, gelijk nul gesteld, de vergelijkingen der beide rigtlijnen van de kegelsnede geeft.

Junij 1891.

MEDEDEELINGEN OMTRENT DE GEOLOGIE VAN NEDERLAND, VERZAMELD DOOR DE COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK.

N°. 2.

GEOLOGISCHE WAARNEMINGEN AAN HET MERWEDE-KANAAL TUSSCHEN UTRECHT EN AMSTERDAM,

DOOR

Dr. J. LORIÉ.

Reeds in 1887 beeldden wij in onze *Contributions à la Géologie des Pays-Bas*, III, »Le Diluvium plus récent ou sableux et le Système Eemien" op plaat VII, fig. 9 een klein profiel af, genomen in de groote ingraving voor de sluis bij Oog-in-Al, even buiten Utrecht, en op bladz. 148 wijdden wij daaraan eenige regels.

Zooals in fig. 1 te zien is, treft men in genoemde doorsnede een viertal horizontale zandlagen aan: de eerste en de derde grijs en horizontaal-gelaagd, de tweede grover, maar op verschillende wijzen transversaal-gelaagd, de vierde weder fijn, bruinachtig grijs en evenzoo uit kleinere hellende laagjes opgebouwd. Allen maken deel uit van de groote zandmassa, waarin de sluisput is uitgegraven en die wij in 1887 tot het Zanddiluvium rekenden. Ook thans zijn wij nog deze beschouwing toegedaan, hoewel zij door latere waarnemingen eenigszins aan het wankelen is gebracht. Het zand is niet, zooals gewoonlijk, geheel fossielvrij, maar bevat verscheidene stukken hout en schors, benevens goed herkenbare katjes van *Betula alba*, die echter voor de nadere ouderdomsbepaling ontoereikend zijn.

Het eigenaardige van deze doorsnede is, dat de 4 zandlagen schuins afgesneden en langs deze helling door de gewone bruine rivierklei bedekt zijn, die ook op de bovenste zandlaag rust en overal in de omgeving aan de oppervlakte komt. De rivierarm, die hier ter plaatse de klei heeft afgezet, heeft zich dus eerst eene geul uitgeschuurd en die later weder geheel toegeslibd. Van veen was in deze ingraving, die wij eenige malen bezochten, niets te zien,

In de onmiddellijke nabijheid daarentegen komt de veenlaag voor den dag, namelijk aan het kruispunt van het kanaal en den grintweg naar Vleuten. Hier bestond het profiel uit 1 M. bruine, 3 d.M. blauwe klei, 1—1$^1/_2$ M. zwartbruin veen met vele platgedrukte rietstengels en verder uit blauw zand, dat soms hooger kwam en het veen soms geheel verving. Hieruit volgt evenwel nog niet, dat dit zand even oud als, of jonger dan de veenlaag zoude zijn.

Vrij wel hetzelfde profiel doet zich voor in het stukje kanaal tusschen de beide spoorwegen naar Rotterdam en Amsterdam. 1 M., of iets daarboven, bruine en blauwe (of lichtgrijze) klei, rustte op 1—1$^1/_2$ M. bruin veen en dit weder op blauw zand. Over een vijftigtal meters in het midden was het veen weder geheel door het zand vervangen, waarop dus weder hier de klei onmiddellijk rustte. Het hooger liggende zand is echter gewoonlijk meer wit- of grijsachtig dan blauw.

Gaven dus deze profielen weinig licht omtrent de verhouding tusschen het veen en het hoog liggende zand, zoo waren wij in zeer gunstigen toestand in den grooten ballastkuil, grenzende aan het kanaal en den spoorweg naar Amsterdam, waar wij in October en November 1890 eenige uitstekende doorsneden konden uitteekenen. Verreweg de hoofdmassa bestaat weder uit hetzelfde zand, dat door klei wordt bedekt. Het eenvoudigst is de sa enstelling aan het oosteinde van den N. W. wand, waar het zand rechtstreeks door 1 M. bruine klei is bedekt; Z.W. gaande wordt de kleilaag snel dikker en vertoont door de aanwezigheid van dunne zandlaagjes eenen laagsgewijzen bouw. Over hare geheele dikte van 2 M. is zij bruin, wat zeker eene uitzondering is. Wij

schrijven dit toe aan het doorlatend vermogen van den ondergrond en aan de afwezigheid daarin van reduceerende bestanddeelen. Nog verder Z.W. komt eene 1 M. dikke veenlaag te voorschijn, die door de klei schuins wordt afgesneden. Deze heeft boven het veen eene dikte van 1,25 M. en is aanvankelijk nog geheel bruin (door de nabijheid van het doorlatende zand), maar spoedig verkrijgen de 2,5 d.M. klei, die onmiddellijk op het veen rusten, eene blauwe kleur, of liever hebben deze behouden, doordien het veen de oxydatie van het ijzeroxydule tegenhield (fig. II).

Feitelijk ligt dus de blauwe klei hier iets hooger dan meer N. O. de onderste bruine klei, en zou dus eerder door de zuurstof uit de lucht te bereiken zijn. Nog iets verder Z. W. ziet men het veen duidelijk op het zand rusten

Eene nauwkeurige meting konden wij verrichten in eenen kleinen kuil in de nabijheid en vonden daar: 1°. 5 d.M. zwartgrijze klei (bouwaarde), 2°. 4 d.M. bruine klei (dus zonder humus), 3°. 2,5 d.M. (grijs) blauwe klei, 4°. 1 M. veen tot op den waterspiegel, enz. In een ander kuiltje, ten Z. van den grooten ballastkuil, ontbrak daarentegen de veenlaag weder geheel en werd het zand rechtstreeks door 8 d.M. bruine (en zwartgrijze) klei bedekt.

Langs den Z. W. wand van den grooten kuil kwam de veenlaag over een honderdtal meters te voorschijn, en evenzoo in den kuil zelven doorloopende naar den N. O. wand. Aan dezen werd het veen nu niet alleen bedekt door klei, zooals reeds herhaaldelijk was waargenomen, maar ook door zand en wel op zeer eigenaardige wijze (fig. III). Over eene lengte van 65 M. gaan namelijk de horizontale zandlaagjes over in dezulke, die 25° naar het N.W. hellen en verderop wederom horizontaal worden. Van eene latere oprichting kan hier moeielijk sprake zijn, en hebben wij dus hoogstwaarschijnlijk met eene oorspronkelijke afzetting in snelstroomend water te doen. In het horizontaal gelaagde zand komen nog eenige dunne kleilaagjes voor en verder wordt het geheel door 1 M. bruine klei bedekt. Hier konden wij tevens waarnemen, dat het zand, dat onmiddellijk onder het veen volgt, oerhoudend is.

Uit dit profiel blijkt dus overtuigend, dat (een gedeelte ten minste van) het zand, dat in hooger niveau ligt dan het veen, tevens geologisch jonger is; dat wij dus nevens een „Zanddiluvium" zeer bepaald hier en daar met een »Zandalluvium" te doen hebben. Alleen aan de ligging zijn beiden in het gunstigste geval van elkander te onderscheiden. Wij mogen uit deze waarneming tevens afleiden, dat ook daar, waar zand en veen in gelijk niveau liggen, het zand jonger kan zijn, dus afgezet in eene ruimte, die in het veen is uitgeschuurd. Tot volkomen hetzelfde besluit kwamen wij ook bij een bezoek aan den Nieuwen-Maasmond. Omgekeerd is het echter evenmin te loochenen, dat veen zich weder heeft gevormd in geulen, die van te voren in ouder zand zijn uitgeschuurd, en het zal zeker wel onmogelijk blijven, hierover, zonder eenigszins belangrijke ingravingen, in voorkomende gevallen te beslissen.

Van dezen kuil tot Maarssen ontbrak in het kanaal de veenlaag weder geheel, ten minste op de punten, die wij tijdens onze bezoeken ontbloot zagen.

Het zand werd daar onmiddellijk door de klei bedekt, die in dikte tusschen 1 en 2 M. afwisselde. Soms was er een overgang tusschen beiden door eenige afwisselende zand- en kleilaagjes en steeds was de klei over hare geheele dikte, tot 2 M. toe, door verweering bruin geworden.

In den zeer diepen kuil voor de draaibrug ten Z. van Maarssen ontbrak veen eveneens; onder de kleilaag kwam alleen wit en blauw zand te voorschijn.

Dit omsloot bij den middenpeiler der brug eenige kleilenzen, waarvan eene eene dikte van 1—1½ M. bereikte, de anderen slechts 1—2 d.M., en die onder eenen hoek van 30°. naar het W. helden. De ontblooting der lagen was hier echter niet zoo gunstig als in den ballastkuil, zoodat er van een verband met de gewone horizontale lagen niets vast te stellen viel.

Even voorbij Maarssen kwam de veenlaag in het kanaal weder te voorschijn op de plaats, waar een windwatermolen door een klein stoomgemaal wordt vervangen, bij mijlpaal 31 in den straatweg. De bovengrond bestond wederom uit

1,5—2 M. klei, die op donkerbruin veen rustte, welks ondergrond niet zichtbaar was. De veenlaag bereikt hier eene belangrijke ontwikkeling, zooals blijkt uit den uitgebaggerden grond ten Z. en vooral ten N. van dezen put. Het veen maakt daarna echter weder plaats voor het gewone zand (zoo bij de Laag-Nieuwkoopsche Poldervaart), dat tot Breukelen slechts door de klei bedekt wordt en soms zelf zeer kleihoudend is. Ook in den grooten kuil voor de draaibrug bij het station Breukelen komt uitsluitend zand voor, dat hier en daar vrij veel dekseltjes van *Bythinia tentaculata* bevat. In het zand is eenig verschil, in zooverre soms de bovenste laagjes bruin gekleurd zijn, in plaats van blauw, zooals gewoonlijk; enkele malen is dit bovenste zand zelfs sterk oerhoudend. De klei had hier trouwens slechts eene dikte van 1—1½ M. Echter ontbreekt het veen hier niet geheel en al, daar ik bij een bezoek in Mei 1889 in dit zand enkele veenlenzen waarnam. De kleilaag bleek er tevens soms vrij snel in dikte af te wisselen en bereikte in eene uitholling in het zand 2 M. dikte.

Ditzelfde was in nog sterkere mate het geval in den kuil voor de beide sluisjes in de Kerkvaart, waar de dikte afnam tot $^1/_2$ M. om een honderdtal meters verder weder toe te nemen tot 2 en zelfs 3 M. Waarschijnlijk hebben wij hier dus te doen met eenen ouden, geheel toegeslibden Vechttak, zooals bij de sluis te Oog-in-Al bij Utrecht. In deze dikke kleilaag waren eenige duidelijke zandlenzen aanwezig, die 5—10° naar het N. helden.

In eene ingraving, 500 M. ten N. van het station Breukelen, waar de Heikop door eenen duiker onder het kanaal doorgaat, rustten 2 M. klei op wit zand. Ook hier omsloot dit laatste veen, doch eerst op 4 M. onder de oppervlakte. Het was zwart, hard, sterk samengeperst en bevatte verscheidene platgedrukte rietstengels. Niet onwaarschijnlijk stemt het, geheel of gedeeltelijk, overeen met de zoogenaamde derrielaag, die eene aanmerkelijk oudere veenvorming vertegenwoordigt.

Eene volgende ingraving werd, voor den duiker der Stads-Wetering, aangetroffen bij de buitenplaats Rupelmonde, bij

Nieuwersluis. De bruine en de blauwe klei hadden elk eene dikte van ongeveer 1 M. en de laatste bevatte eenige der gewone zoetwaterschelpen „*Unio*, *Anodonta*, *Limnaea*, enz." Zand was hier niet ontbloot tijdens ons bezoek.

In het kanaal van hier tot aan het station Nieuwersluis rustte de klei weder op veen, blijkens den uitgebaggerden grond, die vele stukken hout bevatte. Hier en daar was de grens tusschen bruine en blauwe klei goed te zien; meestal was zij onduidelijk en steeds onregelmatig. De bruine klei, met haren zwartgrijzen bovengrond, bereikte gewoonlijk slechts $^1/_2$ M. dikte, wat waarschijnlijk weder met de aanwezigheid van veen in verband staat.

In 1889 nam ik op geringen afstand ten N. van het station Nieuwersluis 1,5—1,75 M. klei op bruin veen waar, met boomstronken, die soms 1 d.M. dik waren en nog een weinig in de klei uitpuilden. Van onderen was de klei lichtblauw; een bruin, niet-humushoudend gedeelte scheen geheel te ontbreken. Hier en daar was om de plantenwortels, die in de blauwe klei waren doorgedrongen, eenig *vivianiet* te onderscheiden. Van Nieuwersluis tot het station Loenen-Vreeland was alleen de uitgebaggerde grond waar te nemen, die uit bruin veen bestond, dat door klei bedekt was geweest. Even vóór het laatstgenoemde station rustte het veen op zavelgrond en bij de Vreelandsche Laan op een zeer glimmerhoudend, fijn zand, dat zelfs tot aan de $1^1/_2$ M. dikke kleilaag omhoog steeg.

Van Weesp naar Amsterdam gaande, ziet men de kleilaag spoedig verdwijnen en komt het veen onmiddellijk aan de oppervlakte; meermalen bevat dit boomstronken en komen deze in het aangrenzende weiland boven den grond te voorschijn.

De ondergrond der veenlaag wordt dus in het onderzochte terrein overal gevormd door wit of blauw zand, waarin nergens steentjes werden aangetroffen. Gemiddeld was de veenlaag 1 M. dik, soms ook dikker. Meermalen werd zij door zand vervangen, dat ten deele ouder, ten deele

bepaald jonger, en dus eene alluviale vorming is. De Rijnarm, waarvan de tegenwoordige Vecht een overblijfsel is, heeft dus meermalen een nieuw bed in het veen gegraven en dit later weder met zand aangevuld, dat enkele malen zelfs op het veen zelf werd afgezet. Dit laatste is echter eene uitzondering en steeds wordt de oppervlakte door rivierklei gevormd, zoolang het kanaal binnen het vroegere overstroomingsgebied der Vecht blijft. Soms is deze kleilaag zeer dik — tot 3 M. — soms ook zeer dun, maar nergens komt het zand aan de oppervlakte. De aanwezigheid van dit laatste, dus van eenen vasten ondergrond, dicht aan de oppervlakte, mag wel als eene der oorzaken beschouwd worden van het aanleggen der talrijke buitenplaatsen aan de Vecht tusschen Maarssen en Nieuwersluis.

Eenigszins verschillend met deze waarnemingen zijn de uitkomsten van de boringen. Steeds wordt daarbij aangegeven eene vermenging van het veen, zoowel met den ondergrond als met de daarop rustende klei; echter is daarbij óf de hoeveelheid veen óf de hoeveelheid klei zeer gering en wordt zij dus, bij eene eenvoudige beschouwing eener doorsnede, zonder nader onderzoek van grondmonsters, licht over het hoofd gezien. In verscheidene dezer boringen was de veenlaag aanmerkelijk dikker dan in onze opgaven, herhaaldelijk zelfs tot 3 M. Grootendeels mag dit wel hierin zijne verklaring vinden, dat bij onze onderzoekingen slechts bij uitzondering de onderkant der veenlaag werd waargenomen en deze meestal door het stilstaande zakwater der ingraving werd verborgen. Waar dit niet het geval was, had dus de veenlaag eene geringere dikte. Ook de aanwezigheid van zand boven het veen werd in eenige dezer boringen gestaafd; zoo bij de stations Breukelen en Nieuwersluis, terwijl bij de Vreelandsche Laan het zand geheel tot aan de oppervlakte reikte. Eene doorsnede van den bodem in dezen zin werd echter nergens door ons waargenomen.

Nevens het aantoonen der afwisselende erosie en sedimentatie, en het verwoesten en weder aangroeien der veenlaag in het algemeen, mag als uitkomst onzer waarnemingen worden genoemd: 1° dat de afzetting van zand meer voor-

komt dicht bij Utrecht, dus hoogerop, dan verder noordelijk, dus meer stroomafwaarts. Ten Z. van Maarssen komt betrekkelijk weinig veen voor en is dit meer door zand vervangen, dat trouwens ook bij Breukelen en Nieuwersluis nog in ruime mate voorhanden is, maar ten N. van het eerste dorp slaagt het veen er meer en meer in zijne plaats tegen het zand te handhaven.

Dit laat zich dan ook gemakkelijk verklaren uit de afnemende stroomsnelheid van den vroegeren Rijnarm. Een bewijs der aanzienlijke stroomsnelheid wordt tevens geleverd door het meermalen voorkomen van hellende zandlagen, waarop wij herhaaldelijk wezen.

Eigenaardig is verder op verscheidene punten de uitkomst van den strijd tusschen oxydatie van boven en reductie van onder, tusschen de zuurstof der lucht en de oplosbare bestanddeelen van het veen. Daar, waar de veenlaag ontbreekt, heeft de bruine rivierklei steeds eene grootere dikte verkregen ten koste van de blauwe, ja zelfs werd eenmaal waargenomen (fig. II) hoe de oxydeerende werking van het van boven indringende regenwater zich tot op eenigen afstand zijdelings uitstrekt tot zelfs boven de veenlaag. Het is alsof de reduceerende humusverbindingen daar naar den doorlatenden ondergrond worden afgevoerd en dus in hare uitwerking geneutraliseerd, zoodat zij eerst in grootere hoeveelheid voorhanden zijnde en blijvende, de blauwe klei voor oxydatie of verweering kunnen beschutten.

Geheel voltooid is het droge Merwedekanaal nog wel niet, maar het graafwerk is thans nagenoeg overal onderhanden genomen, hetzij door handenarbeid, hetzij met excavateurs, zoodat het zeer onwaarschijnlijk is, dat verder graafwerk nieuwe profielen van eenig belang zullen blootleggen. Mocht dit onverhoopt het geval wezen, dan kan de beschrijving daarvan zeer geschikt eene plaats vinden als aanhangsel bij het verslag onzer waarnemingen in den Nieuwen Maasmond, die in de eerste paar jaren zeker nog niet voltooid zal wezen.

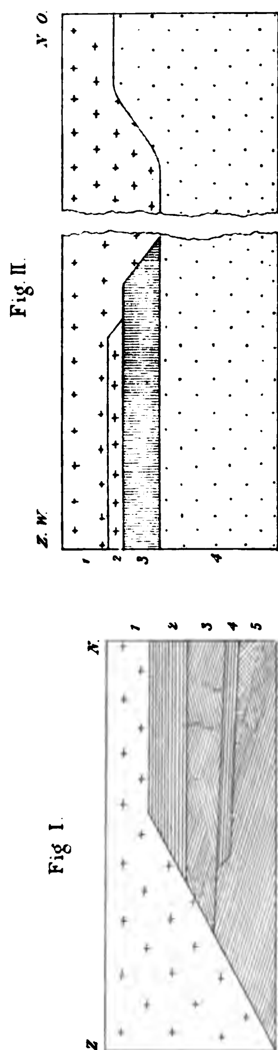
Utrecht einde Mei 1891. J. LORIÉ.

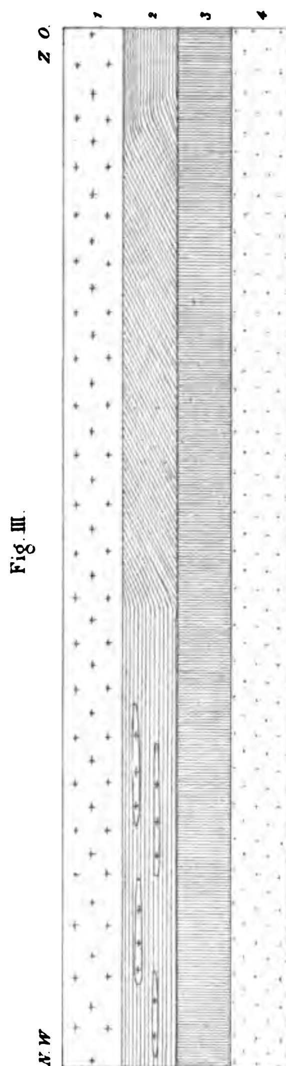
VERKLARING DER FIGUREN.

Fig. I. In den put der sluis te Oog-in-Al bij Utrecht. 1. Klei. 2. Grijs, horizontaal-gelaagd fijn zand. 3. Grover zand, transversaal-gelaagd. 4. Horizontaal-gelaagd, fijn, grijs zand. 5. Fijn, grijsbruin, transversaal-gelaagd zand.

Fig. II. Gedeelte van den N. W. wand van den grooten ballastkuil bij Utrecht. 1. Bruine klei. 2. 0,25 M. Blauwe klei. 3. 1 M. Veen. 4. Zand.

Fig. III. Gedeelte van den N. O. wand van den grooten ballastkuil bij Utrecht. 1. 1 M. Bruine klei. 2. 1 M. ten deele schuin-gelaagd zand met eenige kleilenzen. 3. 1 M. Zwart veen. 4. Zand.


Fig. I.
N.
Z
1
2
3
4
5
Fig. II.
Z. W.
N. O.
1
2
3
4


Fig. III.
Z. O.
N. W.
1
2
3
4

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 26 September 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, GRINWIS, BEHRENS, SURINGAR, RAUWENHOFF, J. A. C. OUDEMANS, WEBER, ZEEMAN, MOLL, FORSTER, STOKVIS, LORENTZ, HOOGEWERFF, VAN DORP, PEKELHARING, SCHOUTE, MULDER, PLACE, FRANCHIMONT, ZAAIJER, HUBRECHT, VAN 'T HOFF, HOEK, MAC GILLAVRY, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, ENGELMANN, VAN RIEMSDIJK, BIERENS DE HAAN, SCHOLS, BAEHR, VAN BEMMELEN, GUNNING, MICHAËLIS, VAN DIESEN, KORTEWEG, KAPTEYN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris; voorts de Correspondent SLUITER, en van de Letterkundige Afdeeling de Heeren: BOOT, SPRUYT, CHANTEPIE DE LA SAUSSAYE en FRUIN.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 9 Juli 1891; 2°. Het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 6 Juli 1891; 3°. Het Ministerie van Oorlog te 's Gravenhage, 7 Juli 1891; 4°. W. N. DU RIEU, Bibliothecaris der Universiteit te Leiden, 4 Juli 1891; 5°. J. W. G. VAN HAARST, Bibliothecaris der Universiteit te Groningen, 4 Juli 1891; 6°. Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, 8 Juli 1891; 7°. De Directeuren van

de Nederlandsche Handelmaatschappij te Amsterdam, 6 Juli 1891; 8°. C. Kerbert, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 21 Juli 1891; 9°. J. Bosscha, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 4 Juli 1891; 10°. A. J. Enschedé, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 4 Juli 1891; 11°. F. W. van Eeden, Secretaris van de Nederlandsche Maatschappij ter Bevordering van Nijverheid te Haarlem, 7 Juli 1891; 12°. G. C. W. Bohnensieg, Bibliothecaris van Teyler's Stichting te Haarlem, 8 Juli 1891; 13°. J. Tideman, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 4 Juli 1891; 14°. A. A. Arntzenius, Griffier van de Tweede Kamer der Staten-Generaal te 's Gravenhage, 21 Juli 1891; 15°. G. J. W. Bremer, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 16 Juli 1891; 16°. H. de Bussy, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, 6 Juli 1891; 17°. L. van der Steen, Bibliothecaris van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te 's Hertogenbosch, 6 Juli 1891; 18°. den Gouverneur van de koninklijke militaire Akademie te Breda, 6 Juli 1891; 19°. Boeles, Bibliothecaris van het Friesch Genootschap voor Geschied- en Oudheidkunde te Leeuwarden, 4 Juli 1891; 20°. A. Réville te Parijs, 15 October 1890; 21°. M. Berthelot te Parijs, 1890; 22°. het Ministère de la Guerre te Parys, 6 October 1890; 23°. W. H. Flower, Directeur van het British Museum (Natural History) te Londen, 3 September 1891; 24°. De kais Akademie der Wissenschaften te Weenen, 27 Juli 1891; 25°. D. Stur, Directeur van de k. k. geologische Reichs-Anstalt te Weenen, 25 Juli 1891; 26°. E. du Bois-Reymond, Secretaris der kön. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, 9 Juli 1891; 27°. H. Kreutz, Bibliothecaris van de kön. Sternwarte te Kiel, 15 Juli 1891; 28°. Conwentz, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Danzig, 19 Juli 1891; 29°. G. Limpricht, Bibliothecaris van de schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 18 Augustus 1891; 30°. C. Knoop,

Secretaris van de Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanaü, 27 Augustus 1891; 31°. H. SCHAAFFHAUSEN, Voorzitter van het Verein für Alterthumskunde im Rheinlande te Bonn, 6 Juli 1891; 32°. SCHAARSCHMIDT, Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Bonn, 9 Juli 1891; 33°. R. VON JHERING te Göttingen, 29 Juni 1891; 34°. H. BRUNS, Bibliothecaris van de astronomische Gesellschaft te Leipzig, 31 Juli 1891; 35°. W. BLASIUS, Secretaris van het Verein für Naturwissenschaft te Brunswijk, 8 Augustus 1891; 36°. K. K. MÜLLER, Bibliothecaris van de medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft te Jena, 27 Juli 1891; 37°. M. FÜRBRINGER te Jena, 27 Juli 1891; 38°. O. BUCHNER, Secretaris van de Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde te Giessen, 1891; 39°. O. BUCHNER, Secretaris van het Oberhessischer Geschichtsverein te Giessen, 1891; 40°. W. VALENTINER, Directeur van de grossherzogliche Sternwarte te Carlsruhe, 11 September 1891; 41°. BARACK, Bibliothecaris van de kais. Universitäts- und Landes-Bibliothek te Straatsburg, 27 Juli 1891; 42°. LAUBMANN, Bibliothecaris van de kön. Hof- und Staatsbibliothek te München, 20 Augustus 1891; 43°. EMIL SELENKA te Erlangen, 23 Augustus 1891; 44°. H. BOESCH, Directeur van het germanische Nationalmuseum te Neurenberg, 3 Augustus 1891; 45°. ZAMPERT, Bibliothecaris van het Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg te Stuttgart, 1 Juli 1891; 46°. HEYD, Bibliothecaris van de kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, 22 Augustus 1891; 47°. A. G. WIEGLER, Secretaris van het historische Verein von Unterfranken und Aschaffenburg te Würzburg, 5 Augustus 1891; 48°. J. BASSO, Secretaris van de Académie royale des Sciences te Turijn, 14 Augustus 1891; 49°. D. CARUTTI te Turijn, 13 Juli 1891; 50°. P. BLASERNA, Secretaris van de regia Lynceorum Academia te Rome, 1891; 51°. D. CHILONI, Bibliothecaris van de R. Biblioteca nazionale centrale te Florence, 27 Juli, 1 Augustus 1891; 52°. F. MORENI, Bibliothecaris van de R. Accademia di Scienze, Lettere et Arti te Modena, 3 Augustus 1891; 53°. den Secretaris van het r. Istituto

di Scienze, Lettere ed Arti te Venetië, 27, 30 Juli 1891; 54°. Hugo Gijlden te Stockholm, 7 Juli 1891; 55°. L. Bijgden, onder-Bibliothecaris van de Universitäts-Bibliothek te Upsala, 7 Augustus 1891; 56°. E. Tegnel, Bibliothecaris van de Universitas Carolina te Lund, 27 Juli 1891; 57°. E. Regel, Directeur van den Jardin impérial de Botanique te St. Petersburg, 28 Juli 1891; 58°. den Directeur van het Observatoire physique central te St. Petersburg, 13 Augustus 1891; 59°. A. Nauck te St. Petersburg, 2 September 1891; 60°. W. Schlüter, Bibliothecaris van de kais. Universitäts-Bibliothek te Dorpat, 17 Augustus 1891; 61°. C. Little, Directeur van het meteorological Office te Calcutta, 26 Augustus 1891; 62°. Bonola, Secretaris van de Société khédiviale de Géographie te Caïro, 1 Augustus 1891; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 20, 21 Juli, 27 Augustus en 1 September 1891; 2°. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 1 Augustus 1891; 3°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 17 Augustus en 15 September 1891; 4°. den Commissaris der Koningin in de provincie Friesland te Leeuwarden, 13 Juli 1891; 5°. Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, 30 Juli 1891; 6°. G. C. W. Bohnensieg, Bibliothecaris van Teyler's Stichting te Haarlem, 1891; 7°. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 3 Augustus, 18 September 1891; 8°. M. Snellen, Directeur van het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, Juli 1891; 9°. L. de Milloué, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 1 Juni, 1 Augustus, 1 December 1890, 12 Februari, 14 Mei 1891; 10°. den Directeur van de Ecole polytechnique te Parijs, 20 Februari 1891; 11°. G. de Chevert te Vesoul, 20 Juli 1891; 12°. den Secretary of State for India te Londen, 9 September 1891; 13°. E. du Bois-Reymond, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften

te Berlijn, Juni 1891; 14°. H. KNOBLAUCH, Voorzitter van de kais Leopoldinisch-Carolinische Akademie te Halle, 4 Juni 1891; 15°. den Bibliothecaris van de Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft te Frankfurt a. M., Augustus 1891; 16°. GILBERT, Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 19 Augustus 1891; 17°. HOFFMANN, Secretaris van het Verein für nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung te Wiesbaden, 10 Juni 1891; 18°. STEIFF, Bibliothecaris van de kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, 1 September 1891; 19°. G. STORM, Secretaris van het Videnskabs-Selskabet te Christiania, 1 Juli 1891; 20°. J. KENNEL, Secretaris van de Naturforscher-Gesellschaft te Dorpat, 26 April 1891; 21°. V. L. AKERBLOM, Directeur van de Commission géologique de la Finlande te Helsingfors, 15 Juni 1891; 22°. J. F. BRIDE, Bibliothecaris van de public Library te Melbourne, 16 Maart 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (4 Sept. 1891), waarin wordt medegedeeld, dat de voorgestelde wijzigingen der artt. 5, 7 en 8 van het Reglement van Orde der Natuurkundige Afdeeling zijn goedgekeurd.

2°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (4 Aug. 1891) ter begeleiding eener missive van den gezant van Groot-Brittannië, en van eenige andere bescheiden, met de uitnoodiging, den Minister te doen weten, welke personen hier te lande, naar het oordeel der Afdeeling, voor het verkrijgen van de ALBERT-medaille in aanmerking zouden kunnen komen. De Heeren MICHAËLIS, VAN RIEMSDIJK, KAMERLINGH ONNES en J. A. C. OUDEMANS worden door den Voorzitter aangewezen om de Afdeeling hierover te dienen van advies.

3°. Brief van het Gemeentebestuur van Amsterdam, ter begeleiding van eene bronzen medaille, geslagen bij gelegenheid van het eerste bezoek aan de Hoofdstad van H. H.

Majesteiten de Koningin en de Koningin-Regentes op 26—29 Mei 1891.

4⁰. Brief van den Heer B. F. MATTHES, ter begeleiding van het portret van wijlen zijn broeder, den hoogleeraar C. J. MATTHES, lid en Algemeen Secretaris der Akademie, aan deze laatste gelegateerd door beider overleden zuster, Mejuffrouw A. M. MATTHES.

5⁰. Kennisgeving van het overlijden van het buitenlandsch Lid der Akademie: den hoogleeraar WILHELM WEBER te Göttingen.

6⁰. Kennisgeving van het overlijden van den Secretaris der koninklijke Akademie van Wetenschappen te Lissabon: JOSÉ MARIA LATINO COELHO.

7⁰. Uitnoodiging ter bijwoning van het 50-jarig jubileum van het Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande.

8⁰. Een opstel van het Lid der Akademie VAN DEN BERG, bestemd voor de Verslagen en Mededeelingen: »Over de berekening van gecentreerde lenzenstelsels".

9⁰. Eene verhandeling van den Heer Dr. W. H. JULIUS, hoogleeraar te Amsterdam: »Bolometrisch onderzoek van absorbtie-spectra", aangeboden voor de werken der Akademie. Zij wordt om advies in handen gesteld van de Heeren KAMERLINGH ONNES en BAKHUIS ROOZEBOOM.

— De Heer STOKVIS draagt het levensbericht voor van wijlen het Lid der Akademie FRANS CORNELIS DONDERS. Na het volbrengen dezer taak wordt hem door den Voorzitter warme hulde gebracht voor de wijze, waarop hij zich van de hem verstrekte opdracht gekweten heeft. Door de liefde, waarmede het onderwerp behandeld en den eerbied, die in de rede voor den grooten geleerde werd blootgelegd, zal zij eene duurzame herinnering bij zijne hoorders achterlaten. Het voorgedragene zal in het eerstvolgende Jaarboek worden opgenomen.

— De Heer ENGELMANN spreekt »over centrifugale functies van de gezichtszenuw", naar aanleiding van proeven van den Heer G. GRIJNS, Med. doct^s. te Utrecht.

In de Vergadering der Afdeeling Natuurkunde van 28 Juni 1884 heeft spr. proeven medegedeeld, waaruit bleek, dat de bewegingen van pigment en kegels van het netvlies onder den invloed van zenuwvezels staan, die langs den n. opticus het oog bereiken; dat dus de gezichtszenuw niet, zooals vroeger algemeen werd aangenomen, een zuiver sensitieve, maar een gemengde, uit centrifugale en centripetale vezels opgebouwde zenuw is. — Mocht dit resultaat, met het oog op de eigenaardige ontwikkeling van den n. opticus (door uitstulping der primaire voorhersenen) en den bouw (samenstelling uit vele zeer dunne en een kleiner aantal dikke vezels) niet bevreemden, toch waren nieuwe bewijzen voor de centrifugale functie gewenscht, te meer nu onlangs twijfel aan de juistheid der interpretatie van de door spr. vroeger gevonden feiten werd uitgesproken (A. E. FICK, GRAEFE's *Archiv für Ophthalmologie*, Bd. 37, 2, blz. 1, 1891).

Een zekere en vermoedelijk gemakkelijke weg ter bereiking van dit doel scheen den Spr. aangewezen door de electrische verschijnselen van het oog. Men mocht verwachten dat centrifugale werkingen van den n. opticus zich ook zouden uiten in electrische verschijnselen, te meer als er goede gronden bestonden om, althans van een gedeelte der electrische processen, in 't oog waargenomen, de bron te zoeken in de contractiele pigmentcellen en kegels.

Op uitnoodiging van den Spr. heeft de Heer G. GRIJNS, Med. docts. aan de Utrechtsche Universiteit, dit onderzoek uitgevoerd. Zijne proeven hebben geleerd, dat zoowel door *reflectorische* als door *directe* prikkeling van den stam van den n. opticus, belangrijke electrische veranderingen in het oog, bepaaldelijk in het netvlies, kunnen opgewekt worden.

De *reflectorische* prikkeling geschiedde óf door licht, óf door chemische prikkels (Na Cl) op het netvlies van het andere oog te laten inwerken, met of zonder doorsnijding van een der nn. optici. De electrische veranderingen waren in 't algemeen van gelijken aard, hoewel aanmerkelijk zwakker dan bij directe prikkeling van het afgeleide oog door invallend licht (voorbijgaande verhooging van de negativiteit

van den aequator), en niet in strijd met de onderstelling, dat zij tot de contracties der kegels en pigmentcellen in een direct causaal verband staan *).

Bij *directe*, electrische of chemische prikkeling van den stam der gezichtszenuw, na doorsnijding zeer dicht bij het chiasma, waren de verschijnselen nog treffender, maar tevens gecompliceerder. Zeer opmerkelijk is de ontdekking van den Heer Grijns, dat bij snel intermitteerende prikkeling (tetanisatie) niet slechts de grootte, maar ook de richting der opgewekte electrische stroomen met het tempo der prikkels kan variëeren, zoodat er bijv. bij 80 prikkels in de secunde een sterke positieve, bij 40 een sterke negatieve, en bij 60 in 't geheel geen verandering wordt waargenomen. Deze en andere verschijnselen (bijv. het samengesteld verloop der schommeling na een enkelen prikkel, de spontane omkeer van den normalen stroom bij 't afsterven) wijzen er op, dat er verschillende bronnen van electriciteitsontwikkeling in 't netvlies aanwezig zijn, hetgeen ook op grond van de anatomische feiten moest worden verwacht.

Merkwaardig zijn ook de uitkomsten van den Heer Grijns betreffende plaatselijke beperkte chemische of electrische prikkeling van het geïsoleerde oog, waarbij karakteristieke electrische veranderingen, ook op ver verwijderde plaatsen van het netvlies, werden waargenomen.

Al deze verschijnselen eischen een nader onderzoek. Alvast mag althans het bestaan van normale centrifugale werkingen in de gezichtszenuw, door de proeven met reflectorische prikkeling, opnieuw en veilig bewezen worden geacht.

De Heer Engelmann biedt verder aan voor de *Verslagen en Mededeelingen* eene verhandeling van Dr. H. J. Hamburger, leeraar aan de veeartsenijschool te Utrecht, getiteld: »Over

---

*) Veel sterkere reflexen dan op het andere oog bleken op de huidstroomen te bestaan. Hierin lag een bron van fouten, die op verschillende wijzen kon worden vermeden.

den invloed der ademhaling op de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes".

In aansluiting aan vroegere onderzoekingen, aan de Koninklijke Akademie medegedeeld (*Verslagen en Mededeelingen* Afdeeling Natuurkunde Derde R. D. VII. St. 1, blz. 15 ibid. St. 3, blz. 364), heeft de Heer HAMBURGER gevonden, dat veneuse bloedlichaampjes (uit gedefibrineerd paardenbloed), in tegenstelling met arterieele, eerst aan sterker geconcentreerde Na Cl-oplossingen haemaglobine afstaan.

De oorzaak hiervan moet, volgens zijne proeven, gezocht worden: niet in een hoogere osmotische spanning van het veneuse bloed, maar in eene wijziging van de permeabiliteit der bloedlichaampjes voor kleurstof. Bij het doorvoeren van CO_2 door gedefibrineerd bloed, blijft de osmotische spanning gelijk, doordat er o. a. chloriden uit het serum in de lichaampjes en vaste stoffen, grootendeels eiwitstoffen, uit de lichaampjes in het serum overgaan. De door CO_2 gewijzigde permeabiliteit der bloedlichaampjes kon door doorvoering van O, H, N weder tot de aanvankelijke waarde teruggebracht worden. — Na doorvoering van CO_2 blijven de roode bloedlichaampjes, in weerwil van hun gewijzigde permeabiliteit, de wetten der isotonische coëfficienten volgen.

Het CO_2 heeft, volgens deze proeven, eene tot dusverre onbekende beteekenis voor de stofwisseling in de weefsels. Het veroorzaakt, door wijziging der permeabiliteit, eene wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en omgeving. Een analoge beteekenis moet ook aan de gaswisseling van het bloed in de longen worden toegeschreven; gevolgtrekkingen, die door den Heer HAMBURGER nader worden ontwikkeld.

— De Heeren ENGELMANN en PEKELHARING verklaren zich, op het verzoek des Voorzitters, bereid, over de verhandeling rapport uit te brengen in de volgende vergadering.

— De Heer FRANCHIMONT deelt, op verzoek van Dr. C. A. LOBRY DE BRUYN, mede, dat genoemde Heer zich sedert geruimen tijd heeft bezig gehouden met de bereiding van het

vrije *hydroxylamine* en het onderzoek zijner eigenschappen, en vertoont een fleschje met deze stof.

Het is een vast, kleurloos, reukloos, fraai kristalliseerend lichaam. dat verkregen wordt uit de verbinding van het hydroxylamine met chloorwaterstof, door deze in methylalcoholische oplossing met de berekende hoeveelheid natriummethylaat te ontleden, waarna de vloeistof van het gevormde chloornatrium afgefiltreerd en onder verminderden druk gedistilleerd wordt. Wanneer op deze wijze de grootste hoeveelheid van den alcohol verwijderd is, wordt, onder zeer lagen druk, op de vrije vlam gefractionneerd gedistilleerd. De afzonderlijk opgevangen fracties worden hoe langer zoo rijker aan hydroxylamine, maar bevatten eenig water en ammoniak, afkomstig van eene geringe ontleding. Bij eene herhaalde fractionneering der rijkste gedeelten, krijgt men ten slotte nagenoeg zuiver hydroxylamine.

Het vertoonde praeparaat is bij een druk van 35 m.m. tusschen 63°.5 en 65°.5 overgegaan en bevat, blijkens titrage, ongeveer 99.5 $^0/_0$ hydroxylamine. Het smelt bij 31°.5; zijn soortelijk gewicht is aanmerkelijk hooger dan dat van water. Het is zeer hygroscopisch; bij verhitting in de lucht verbrandt het met een lichtgele vlam; langeren tijd op 100° gebracht, ontploft het. Natrium werkt er heftig op en met verschillende zouten geeft het eene oplossing. Het is zoowel in vrijen toestand als in waterige oplossing vrij bestendig; eene oplossing van 60 $^0/_0$ was na vele weken staan niet merkbaar in gehalte afgenomen.

— De Heer VAN BEMMELEN biedt, uit naam der geologische Commissie, twee opstellen aan, waarin door de Heeren SCHROEDER VAN DER KOLK en VAN CAPPELLE verslag wordt gegeven van hunne onderzoekingen, op verzoek dier Commissie in den afgeloopen zomer ondernomen. Het opstel van den Heer SCHROEDER VAN DER KOLK heeft tot titel: »Verslag eener proeve van geologische kaarteering in de omstreken van Markelo" en dat van den Heer VAN CAPPELLE: »Kort verslag van eenige geologische waarnemingen in het diluviale gebied van West-Drenthe." Beide stukken zullen ter perse worden gelegd.

— De Heer Behrens doet eene korte mededeeling over de mikro-structuur van gehard staal. Door toepassing van sterke objectieven en van eene geschikte verlichting, is het hem gelukt, op gepolijste platen van gehard staal een fijn netwerk tot mikroskopische waarneming te brengen, zonder daarbij van etsing of van aanloopkleuren gebruik te maken.

Daar het verschijnen van de gekronkelde donkere lijnen onder deze omstandigheden alleen aan hardheidsverschillen kan worden toegeschreven, mag het bewezen geacht worden, dat gehard staal harde korrels van onregelmatigen vorm bevat, die in eene mindere hoeveelheid van zacht ijzer opgesloten zijn. Wanneer men voorts in aanmerking neemt, dat de bedoelde donkere lijnen door etsing helder worden, terwijl de harde korrels eene bruinachtige tint aannemen, overeenkomstig met de beschrijvingen, door Sorby en door Wedding gegeven, zoo volgt hieruit, dat in de harde korrels het koolstof-gehalte van het staal opgehoopt moet zijn.

Sommige variëteiten van grijs gietijzer (fijnkorrelig grijs ijzer van kleine gegoten voorwerpen) bleken, evenals staal, voor harding vatbaar te zijn. Het geharde metaal vertoonde rechthoekige kristallieten, uit langwerpige globulieten saamgesteld, die door etsing bruin werden, terwijl zich daartusschen een helder netwerk voordeed. Het grafietisch stof was nagenoeg verdwenen. Door gloeien en geleidelijke bekoeling, waarbij het metaal zacht werd, kwam het weder te voorschijn, en wel aan periphere en centrale insluitsels in de globulieten. Men dient dus aan te nemen, dat een innig mengsel van ijzer en grafiet, bij heldere gloeihitte, tot eene instabiele verbinding verandert, die door plotselinge afkoeling kan bestendigd worden, terwijl zij bij geleidelijke bekoeling tot zacht ijzer en vrije koolstof uiteenvalt.

— De Heer Mulder biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling: »Over eene verbinding, afgeleid van Wijnsteenzuur."

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden: Uit naam der Regeering, door den Heer J. A. C. Oudemans:

»Die Triangulation von Java, ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch Ost-Indien, 3te Abtheilung: Ergänzungen zu den beiden ersten Abtheilungen. Genaue Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem Normalmeter und dem Mètre des Archives. Das Basisnetz von Simplak. Basismessungen bei Logantong und bei Tangsil, sowie die beiden dazu gehörenden Basisnetze. Im Auftrag des Ministeriums der Kolonien und unter Mitwirkung von J. C. A. van Asperen, M. L J. van Asperen, W. G. Teunissen und A. A. Nijland, bearbeitet von Dr. J. A. C. Oudemans;

door den Heer Weber het 1ste stuk van deel II zijner »Zoologische Ergebnisse einer Reise in Niederländisch-Ost-Indien";

door den Heer Stokvis: zijne »Voordrachten over de Geneesmiddelleer";

door den Heer Bierens de Haan: een nieuw stuk van het Nieuw Archief voor Wiskunde;

door den Heer Hubrecht zijne »Studies on the development of the germinal layers of Sorex vulgaris;"

door de Redactie van het Recueil des Travaux Chimiques des Pays-Bas, twee afleveringen van dit tijdschrift.

De Voorzitter doet opmerken, dat het buitenlandsch Lid der Akademie Rudolph Virchow in de maand October zijn 70en verjaardag hoopt te vieren. Hij stelt voor, ook dien geleerde, evenals aan Helmholtz, een adres van gelukwensching, uit naam der Afdeeling, bij deze gelegenheid aan te bieden. Daar de Vergadering zich met het voorstel vereenigt, leest de Secretaris den gelukwensch voor, zooals die, in de Nederlandsche taal, reeds bij voorbaat was opgesteld door de Heeren Zaaijer en Mac Gillavry. De Vergadering vereenigt zich met den inhoud van dit adres, dat den jubilaris nu ter bestemder tijd zal worden toegezonden.

— Daar er verder niets meer te behandelen is, wordt de vergadering gesloten.

OVER DE BEREKENING VAN GECENTREERDE LENZENSTELSELS.

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.



In de *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Vol. 16, 1880—81, heeft de Heer G. FERRARIS in eene verhandeling „Sui cannocchiali con obbiettivo composto di più lente a distanza le une dalle altre", pag. 45—70, algemeene formulen ontwikkeld voor de bepaling van de beide brandpunten en van den brandpuntsafstand van een gecentreerd stelsel van lenzen, uitgedrukt in de brandpuntsafstanden en in de onderlinge afstanden der afzonderlijke lenzen van het stelsel.

Uit deze formulen zijn door den Heer J. BUENO DE MESQUITA in de *Verslagen en Mededeelingen* onzer Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde, 2de reeks, 18de deel, 1883, blz. 329—342, onder den titel: »Algemeene vergelijkingen voor een gecentreerd lenzenstelsel" (ook vertaald in de *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, Tome 18, 1883, pag. 57—69) vergelijkingen afgeleid, dienstig om voor het geval, waarin de brandpuntsafstanden van de beide uiterste lenzen en van het geheele stelsel als drie onbekenden voorkomen, deze onbekenden regtstreeks uit de overige grootheden als gegevens op te lossen.

Het trok onlangs mijne aandacht dat de bedoelde formulen en vergelijkingen ook op eene eenigzins andere wijze te verkrijgen zijn, waarbij onder anderen de door de Heeren FERRARIS en DE MESQUITA gebezigde kettingbreuken ontgaan

worden en de herleiding mij overigens toeschijnt eenigermate te worden bekort, en welke rekenwijze ik mij veroorloof hierbij als eene kleine bijdrage tot dit onderwerp aan te bieden.

Evenals de Heer Ferraris neem ik tot grondslag van berekening de formulen voor een stelsel van twee langs dezelfde as en in dezelfde middenstof geplaatste lenzen. Zijn dan — alle afstanden in de rigting van het licht positief tellende — φ_1 en φ_2 de brandpuntsafstanden der beide lenzen en D de afstand van het tweede brandpunt der eerste lens tot het eerste brandpunt der tweede, dan worden de afstand a van het eerste brandpunt der eerste lens tot het eerste brandpunt van het stelsel der beide lenzen, de afstand b van het tweede brandpunt der tweede lens tot het tweede brandpunt van het stelsel, en de brandpuntsafstand Φ van het stelsel bepaald door $a = -\frac{\varphi_1^2}{D}$, $b = \frac{\varphi_2^2}{D}$ en $\Phi = -\frac{\varphi_1 \varphi_2}{D}$.
Past men nu, als er n lenzen zijn, waarvan in het algemeen φ_m den brandpuntsafstand van de m^{de} lens en D_{m+1} den afstand van het tweede brandpunt der m^{de} lens tot het eerste brandpunt der $(m+1)^e$ beteekent, de eerste en de derde der aangehaalde formulen toe op de verbinding van de m^{de} lens met de in de plaats van de $(m+1)^e$ tot en met de n^{de} lens te denken resulterende lens, en noemt men daarbij nog a_m den afstand van het eerste brandpunt der m^{de} lens tot het eerste brandpunt van het aldus verbonden stelsel van de m^{de} tot en met de n^{de} lens, en $\Phi_{m.n}$ den brandpuntsafstand van ditzelfde stelsel, dan heeft men

$$a_m = -\frac{\varphi^2_m}{D_{m+1} + a_{m+1}} \quad \text{en} \quad \Phi_{m.n} = -\frac{\varphi_m \Phi_{m+1.n}}{D_{m+1} + a_{m+1}}.$$

Voert men thans nog de notatie $a'_m = \frac{a_m}{\varphi_m}$ in, dan komt

$$(\varphi_{m+1} a'_{m+1} + D_{m+1})\, a'_m + \varphi_m = 0 \quad \text{en} \quad \Phi_{m.n} = a'_m \Phi_{m+1.n};$$

en neemt men hierin opvolgend $m = n-1$, $n-2$, enz., 1, dan geeft de eerste van deze formulen, indien men daarbij

let op $a'_n = \frac{a_n}{\varphi_n} = 0$, een stelsel van $n-1$ vergelijkingen die, geschreven onder den vorm:

$$
\begin{aligned}
a'_{n-1}a'_{n-2}\ldots a'_1) + \varphi_{n-1}\,(a'_{n-2}\ldots a'_1) \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0\\
a'_{n-1}a'_{n-2}\ldots a'_1) + D_{n-1}(a'_{n-2}\ldots a'_1) + \varphi_{n-2}(a'_{n-3}\ldots a'_1) \ldots\ldots &= 0\\
\varphi_{n-2}\,(a'_{n-2}\ldots a'_1) + D_{n-2}(a'_{n-3}\ldots a'_1) + \varphi_{n-3}(a'_{n-4}\ldots a'_1) \ldots &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
\varphi_3\,(a'_3\,a'_2\,a'_1) + D_3(a'_2a'_1) + \varphi_2(a'_1) &= 0\\
\varphi_2(a'_2a'_1) + D_2(a'_1) &= -\varphi_1
\end{aligned}
$$

de $n-1$ als onbekenden te beschouwen producten $(a'_{n-1}a'_{n-2}\ldots a'_1)$, $(a'_{n-2}\ldots a'_1)$, enz., (a'_1) lineair bevatten; terwijl de tweede formule eveneens $n-1$ vergelijkingen geeft, wier gedurig product, gelet op $\Phi_{n.n} = \varphi_n$, oplevert $\Phi_{1.n} = (a'_{n-1}a'_{n-2}\ldots a'_1)\varphi_n$. Stellende derhalve den determinant van de coëfficienten der eerste leden van de vorenstaande $n-1$ lineaire vergelijkingen door

$$
R'_{n.2} = \begin{vmatrix}
D_n & \varphi_{n-1} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0\\
\varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \varphi_{n-3} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \varphi_3 & D_3 & \varphi_2\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \varphi_2 & D_2
\end{vmatrix}
$$

voor, en lossende uit die vergelijkingen de allerlaatste en de allereerste van hare voornoemde $n-1$ onbekenden op, vindt men $R'_{n.2}(a'_1) = -\varphi_1 R'_{n.3}$ en $R'_{n.2}(a'_{n-1}a'_{n-2}\ldots a'_1) = (-)^{n-1}\varphi_1.\varphi_{n-1}\,\varphi_{n-2}\ldots\varphi_2$, en hiermede $a_1 = \varphi_1 a'_1 = -\varphi_1^2\frac{R'_{n.3}}{R'_{n.2}}$ en $\Phi_{1.n} = (-)^{n-1}\frac{\varphi_1\,\varphi_2\ldots\varphi_n}{R'_{n.2}}$. En noemt men nu nog in het algemeen b_m den afstand van het tweede brandpunt der m^{de} lens tot het tweede brandpunt van het stelsel van de eerste tot en met de m^{de} lens, dan is er, om b_n uit a_1 te kunnen

afschrijven, niet anders noodig dan de gezamenlijke n lenzen in tegengestelden zin te doorloopen, waarbij iedere φ_m overgaat in $-\varphi_{n-m+1}$, iedere D_{m+1} in $-D_{n-m+1}$, dus $R'_{n.2}$ in $(-)^{n-1} R'_{n.2}$ en $R'_{n.3}$ in $(-)^n R'_{n-1.2}$, waardoor men verkrijgt $b_n = \varphi^2_n \frac{R'_{n-1.2}}{R'_{n.2}}$. Zoodoende zijn de drie hoofdformulen (3), (4), (5) van Ferraris teruggevonden.

Bij het door den Heer de Mesquita behandelde vraagstuk komt het er nu op aan, uit deze drie formulen de waarden van φ_1, φ_n en $\Phi_{1.n}$ (die wij verder eenvoudig Φ zullen noemen) als drie onbekenden op te lossen, evenwel in de onderstelling dat de door a_1 en b_n aangeduide afstanden van een der brandpunten van eene uiterste lens tot het gelijknamige brandpunt van het stelsel niet zelve als gegevens voorkomen, maar in plaats daarvan de afstand h van het eerste hoofdpunt der eerste lens tot het eerste brandpunt van het stelsel en de afstand k van het tweede hoofdpunt der n^{de} lens tot het tweede brandpunt van het stelsel. De voor a_1 en b_n gevonden formulen zijn daarom te vervangen door $h = -\varphi_1 + a_1 = -\frac{\varphi_1}{R'_{n.2}}(R'_{n.2} + \varphi_1 R'_{n.3})$ en $k = \varphi_n + b_n =$ $= \frac{\varphi_n}{R'_{n.2}}(R'_{n.2} + \varphi_n R'_{n-1.2})$, en daarbij is in het oog te houden dat — uithoofde, als in het algemeen δ_{m+1} den gegeven afstand van het tweede hoofdpunt der m^{de} lens tot het eerste hoofdpunt der $(m+1)^e$ beteekent, $D_{m+1} = \delta_{m+1} - \varphi_m - \varphi_{m+1}$ is — ook de determinanten $R'_{n.2}$ en $R'_{n.3}$ in hun eerste element D_n de onbekende φ_n bevatten, evenals $R'_{n.2}$ en $R'_{n-1.2}$ in hun laatste element D_2 de onbekende φ_1. Voor de oplossing in de gegevens wordt daarom, zoo mogelijk, de overgang wenschelijk van de drie genoemde determinanten R' tot een determinant R die geheel van φ_1 en φ_n bevrijd is; en een zoodanigen kan men verkrijgen door slechts in $R'_{n.2}$ de beide uiterste elementen D_n en D_2 te vervangen door $D_n + \varphi_n = \delta_n - \varphi_{n-1}$ en door $D_2 + \varphi_1 = \delta_2 - \varphi_2$, namelijk

$$R_{n.2}=\begin{vmatrix} \delta_n-\varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & 0 & 0 & .0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{n-1} & D_{n-1} & \varphi_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{n-2} & D_{n-2} & \varphi_{n-3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & D_3 & \varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & \delta_2-\varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Gebruik makende van de bekende beknopte notatie voor determinanten heeft men dan vooreerst, juist op grond van deze alleen aan de twee uiterste elementen aangebragte wijziging,

$$R_{n.2}=\Sigma\pm(D_n+\varphi_n)\,D_{n-1}\ldots D_3\,(D_2+\varphi_1)=$$
$$=\Sigma\pm D_nD_{n-1}\ldots D_3\,(D_2+\varphi_1)+\varphi_n\Sigma\pm D_{n-1}\ldots D_3(D_2+\varphi_1),$$

dat is

$$R_{n.2}=R'_{n.2}+\varphi_1\,R'_{n.3}+\varphi_n\,R'_{n-1.2}+\varphi_1\,\varphi_n\,R'_{n-1.3};$$

en schrijft men dit nu verder onder den vorm

$$R_{n.2}=\frac{(R'_{n.2}+\varphi_1R'_{n.3})(R'_{n.2}+\varphi_nR'_{n-1.2})-\varphi_1\varphi_n(R'_{n-1.2}R'_{n.3}-R'_{n.2}R'_{n-1.3})}{R'_{n.2}},$$

dan blijkt in het tweede lid de eerste term evenredig te zijn aan het product $h\,k$, terwijl men den tweeden term kan uitdrukken door toepassing van de eigenschap (zie bij voorbeeld Dr. R. Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 3[e] Auflage, 1870, pag. 50—52) dat de determinant van den tweeden graad

$$\begin{vmatrix} R'_{n-1.2} & (\varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\ldots\varphi_2) \\ (\varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\ldots\varphi_2) & R'_{n.3} \end{vmatrix}=R'_{n-1.2}R'_{n.3}-(\varphi_{n-1}\varphi_{n-2}\ldots\varphi_2)^2,$$

die namelijk tot elementen heeft de vier hoekelementen van den toegevoegden determinant van $R'_{n.2}$, gelijk is aan $R'_{n.2}$ maal den coëfficient $R'_{n-1.3}$ van den overeenkomstigen hoekdeterminant van $R'_{n.2}$ zelf. Door dit een en

ander gaat de voor $R_{n.2}$ gevonden uitdrukking over in $R_{n.2} = -hk\frac{R'_{n.2}}{\varphi_1\varphi_n} - \frac{\varphi_1\varphi_n}{R'_{n.2}}(\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-1})^2$, die ten slotte, ten einde gelijktijdig φ_1, φ_n en $R'_{n.2}$ te verdrijven, slechts met $\frac{\varphi_1\varphi_n}{R'_{n.2}} = (-)^{n-1}\frac{\Phi}{\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-1}}$ behoeft vermenigvuldigd te worden om de vierkantsvergelijking (9) van den Heer DE MESQUITA, namelijk $\Phi^2 + (-)^{n-1}\Phi\frac{R_{n.2}}{\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{n-1}} + hk = 0$, te verkrijgen waarvan de hoofdonbekende Φ afhangt.

Daar overigens de factor $R'_{n.2} + \varphi_1 R'_{n.3}$ van h in werkelijkheid behalve van gegevens slechts van de onbekende φ_n afhangt, en de factor $R'_{n.2} + \varphi_n R'_{n-1.2}$ van k evenzoo van de onbekende φ_1, is het duidelijk dat, Φ gevonden zijnde, de deeling van h en k door deze Φ dadelijk φ_n en φ_1 doet kennen (vergelijk aldaar de formulen (7) en (8)). De herleiding tot de vormen (10), (11) en (12) kan zooals daar ter plaatse geschieden.

Augustus 1891.

MEDEDEELINGEN OMTRENT DE GEOLOGIE VAN NEDERLAND, VERZAMELD DOOR DE COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK.

N⁰. 3.

VERSLAG

EENER PROEVE VAN GEOLOGISCHE KARTEERING IN DE OMSTREKEN VAN MARKELO, IN JULI EN AUGUSTUS 1891 VERRICHT

DOOR

Dr. J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK.

Voorbereidende Werkzaamheden.

De eerste geologische karteering, in Nederland ondernomen, is die van Staring. Vóór ongeveer 30 jaar werd door hem het reuzenwerk eener geologische kaart van Nederland tot stand gebracht. Deze kaart verkreeg eene zoo groote beroemdheid, dat (zooals ik reeds in mijn opstel over kristallijne zwervelingen mededeelde) in Berlijn een Commissie gevormd werd om Staring's methode te leeren kennen en deze aan de ophanden zijnde karteering van het N. D. diluvium zooveel mogelijk ten grondslag te leggen.

Deze Commissie bezocht in het jaar 1874 Nederland, en, terwijl op het gebied van geologisch karteeren in Nederland eene lange rust intrad, werd in N. Duitschland, hoofdzakelijk in de omstreken van Berlijn en Stettin, het diluvium in kaart gebracht. In dit tijdperk werd de methode gewijzigd, veranderden de eischen, en werd een schat van ervaring verkregen.

Voordat ik mij met het karteeren van den bodem in het nederlandsch diluvium ging bezig houden, achtte ik het

daarom volstrekt noodig de wijze te leeren kennen, waarop in het duitsche diluvium wordt te werk gegaan.

Met dit doel woonde ik in den zomer van 1891 een paar maanden de karteeringen in het noord-duitsche diluvium bij, onder leiding van Dr. F. Wahnschaffe bij Finkenwalde, ten O. van Stettin en bij Strausberg in de Mark; van Dr. G. Lattermann bij Penkun en bij Kyritz aan de Oder; van Dr. Müller bij Löcknitz ten W. van Stettin; van Dr. K. Rördam bij Vixö ten W. van Kopenhagen; en van Dr G. de Geer bij Strömstad in het Noorden van Bohuslän. Zelf volbracht ik een paar karteerproeven bij Colow bij Finkenwalde en bij Gielsdorf in de Mark; dit alles om mij voor een karteering in het Nederlandsch diluvium voor te bereiden.

Methode van karteering in het quartair.

Bij het zoeken naar een geschikt punt van uitgang, kwam het mij geraden voor eene streek te kiezen, waar afwisseling heerscht, maar waar de onderlinge verhouding der lagen niet te verward is. Een dergelijk en tevens niet ondankbaar terrein trof ik aan in de omstreken van Markelo: de omgeving der heuvelreeks die zich van Geesteren tot Hellendoorn uitstrekt.

Vooraf moge echter eene korte uiteenzetting worden gegeven, hoe bij de karteering door mij werd te werk gegaan.

Het duidelijkst blijkt ons de geologische bouw van een streek uit de insnijdingen; het is dan ook zaak, als punt van uitgang een terrein te kiezen, waar deze voorhanden zijn. Over het algemeen echter zijn insnijdingen in ons vaderland zeldzaam, zoodat men, indien de horizontale grenzen eener laag, die aan de oppervlakte ligt, moeten worden bepaald, tot boringen zijn toevlucht heeft te nemen. Het hoofddoel der boringen is: den schadelijken invloed der steigeraarde te verwijderen. Hiertoe maakte ik gebruik van twee gladde boren met lepel, doch zonder schroefdraad, vervaardigd in de Ambachtsschool te Leiden en in den loop der werkzaamheden gewijzigd. Hun lengte was onderscheidenlijk 1 en 2 meter; afmetingen, voor het hoofddoel: volledige doorboring der Steigeraarde, voldoende. Tot het indrijven werd van een

houten hamer gebruik gemaakt, die het in duurzaamheid en goedkoopte van een messinghamer, zooals die in Duitschland veelal gebruikt wordt, wint. De uitkomsten der boringen werden volgens een schema, de d.M. als eenheid, aangegeven zooals uit het volgende voorbeeld blijkt:

z l z 2
l z 3
z l 5
l 7
z 3

d. w. z. aan de oppervlakte ligt zwak leemig zand, ter dikte van 2 d.M., daaronder volgt een laag leemig zand ter dikte van 3 d.M., daaronder zandige leem in een bank van 5 d.M. enz.

Door de »Preussische Geologische Landesanstalt" worden 7 hoofdsoorten van grond onderscheiden: humus, zand, grint, klei, leem, kalk, mergel, bovendien ijzersteen, phosphorzuur *) en infusoriënaarde; door verplaatsing der letters, en door de indices: — en ᵕ, is men met dit stelsel in staat ongeveer 200 schakeeringen in de samenstelling van den bodem aan te duiden; zulk een groot aantal is evenwel geologisch overbodig en practisch nooit toegepast.

Blijkt het nu uit twee boringen dat, afgezien van de steigeraarde, op twee naburige punten een zelfde laag aan de oppervlakte ligt, dan wordt de onderstelling gemaakt, dat deze laag op de verbindingslijn eveneens aan de oppervlakte is gelegen, tenzij dit door het relief, door den plantengroei of het karakter der zwervelingen als anderszins, onwaarschijnlijk wordt. Zoodoende komen wij van boorpunten tot lijnen, een netwerk van geologisch gekleurde wegen. Dit alles geschiedt in het veld. De mazen van dit wegennet worden dan t'huis geïnterpoleerd. Het vertrouwbaarst zijn dus de punten; daarna komen de lijnen (wegen) en eindelijk de vlakke figuren. Intusschen winnen deze laatsten aan vertrouwbaarheid daar

*) Met Phosphorzuur wordt Vivianiet bedoeld.

zij getoetst worden aan kleine bestaande of ingestelde gravingen, door den stand van het veldgewas, door het karakter der flora, door het relief, door het karakter der zwervelingen, door contrôleboringen enz.

Hetgeen op deze wijze in kaart gebracht wordt, is niet zuiver geologisch; zoo is het, om een voorbeeld te geven, voorshands niet mogelijk, altijd te beslissen of de een of andere Rijnafzetting denzelfden ouderdom bezit als de een of andere glaciaalafzetting. Ook al heeft men de persoonlijke overtuiging, dat zij even oud zijn, dan is het toch nog beter ze op de kaart voorloopig gescheiden te houden en dus min of meer petrografisch te karteeren. Hiertegen is te minder bezwaar daar zelfs de kaarten van de »Preussische Geologische Anstalt" petrografische gegevens opnemen en er zelfs een ruim gebruik van maken. Eenigszins heerscht in Duitschland het streven om op de diluvium-kaarten door kleuren geologisch, door punkteering en arceering petrografisch te onderscheiden, ten einde door dit laatste de agronomie te baten. Aangezien de agronoom echter een veel grooter schaal verlangt dan de geoloog, en aangezien het opnemen van geologische nevens agronomische gegevens de kaart voor beiden minder duidelijk maakt, (zoodat dan ook de duitsche kaart door een agronoom daar te lande ongeveer nooit geraadpleegd wordt), zoo schijnt het geraden met petrografische aanteekeningen zuinig te wezen.

Een belangrijk punt bij het karteeren is de keuze der schaal. Starings kaart is op de schaal 1 : 200000, de schaal der pruisissche kaart is 1 : 25000, de zweedsche 1 : 50000 en 1 : 200000 enz.

De groote schaal is te verkiezen in het veld, omdat deze voor de aanteekeningen meer ruimte biedt; de kleine schaal is voldoende voor de gegevens die er bij de uitgave op moeten voorkomen. In Denemarken werkt men dan ook in het veld met een schaal van 1 : 20000, terwijl voor de uitgave 1 : 80000 wordt gebezigd. De kaarten worden daardoor nauwkeuriger dan wanneer zij onmiddellijk 1 : 80000 gekarteerd waren.

Het deensche stelsel bleek mij bij mijn proefneming in den afgeloopen zomer het meest geraden; zelfs bezit het voor ons land, boven de opgenoemde voordeelen, nog andere.

Onze chromotopografische kaart komt ook in schetsbladen uit; de schaal 1 : 25000 en de weinige namen geven voldoende ruimte tot het maken van vele aanteekeningen; de lichte druk is bevordelijk voor de duidelijkheid der kleuren; het kleine formaat handig in het veld; de hoogtelijnen, die er soms op voorkomen, bevorderlijk voor een juiste interpolatie te huis en een gemakkelijke orienteering in het relief van het landschap. Ten slotte strekt tot hun aanbeveling de geringe kosten, hetgeen van eenig belang is, daar het wenschelijk kan zijn, van elk blad meerdere exemplaren te bezitten.

Men zou nu den duitschen weg kunnen volgen en de gegevens op twee bladen uitgeven:

1°. een boorkaart, waarop alle gedane boringen staan aangeteekend.

2°. een geologisch-agronomische kaart, waarop alleen enkele typische boringen worden aangegeven.

De eerstgenoemde kaart wordt zooals de veeljarige ondervinding in Pruisen leert, bijna nooit gebruikt: noch door agronomen, noch door geologen, noch door andere personen. Het zou dan ook voldoende wezen het handschrift in de bibliotheek te bewaren, waar het zoo noodig kan geraadpleegd worden. De geologisch-agronomische kaart van het diluvium, waarin slechts enkele gegevens zijn opgenomen, is onnoodig groot en kan voor ons land zeer goed door onze kaart op de schaal 1 : 50000 vervangen worden.

Proeve van karteering bij Markelo.

Zooals ik in mijn opstel over kristallijne zwervelingen opmerkte en ook nu weer is gebleken, is het karteeren bij ons te lande met grooter moeielijkheden verbonden dan in het diluvium van N. O. Duitschland. Heeft men echter eenmaal een vast punt verkregen, dan is het mogelijk, gemiddeld een vierkanten kilometer per dag in kaart te brengen.

Als punt van uitgang koos ik den bodem van de steenbakkerij bij den Viersprong, ten Z. van het station Markelo. De bodem bestaat hier*) uit een leem, oppervlakkig meer of

*) Zie de bijgevoegde schetskaarten.

minder zandig en zeer rijk aan skandinaafsche, maar bijna geheel ontbloot van Rijngesteenten. Deze leem is ongeveer 13 d.M. dik; daarop volgt 3 d.M. zeer steenrijk zand; daaronder weer leem, meestal blauw, aanvankelijk keihoudend, op grootere diepten echter vrij van zwervelingen, ten slotte zeer vet. Bij het boren van een put, jaren geleden, werd de leem op 13 meter nog niet doorboord; hij verkreeg meer en meer het karakter van klei en bevatte enkele haaientanden. Vermoedelijk ligt hier keileem onmiddellijk op tertiair. Volgens mijn meening zou men hier met de onderste keileem te doen hebben. Basalten, die ik er uit verzamelde en die nog onderzocht moeten worden zullen den doorslag geven.

Uit dezen bodem verzamelde ik bovendien Ålandrapakivis, -granieten, -porfieren, Skolithuszandsteen, Åsbydiabaas, Elfdalensche porfier, Rhombenporfier enz. Daar sommige daarvan nog mikroskopisch onderzocht moeten worden, hoop ik hierop later terug te komen. Volmaakt dezelfde leem met keien werd aan de Geesterensche Esch aangetroffen, zoodat wij hier met een zuidelijken uitlooper van den Markeloschen rug te maken hebben, die intusschen door alluvium daarvan gescheiden is; het gelukte mij niet een voortzetting tot Borkelo aan te toonen.

In de eerste plaats moesten de horizontale grenzen van de leem bepaald worden, met behulp van boringen en bestaande gravingen.

Daar waar de leem plaats maakte voor een andere vorming bestond deze uit zand, en, omdat de leem aan het oppervlak tot zand was verweerd, heeft men dus aan het oppervlak tweeërlei soorten zand te onderscheiden. Beide vormingen toonen ten deele reeds op het oog verschil, zonder dat men van boringen of bestaande gravingen heeft gebruik te maken. In het leemgebied, dat gewoonlijk iets hooger ligt dan het omgevende zand, liggen veel meer keien aan de oppervlakte. Deze keien zijn voor een grooter deel van Skandinaafschen oorsprong dan die in het zandgebied. Kleine bulten zijn zeldzamer dan daar waar het zand ook den ondergrond vormt. Eiken en sommige veldgewassen groeien er weliger; de gewone distel (Carduus crispus), Gentiana Pneumonanthe, Drosera

rotundifolia, groeien ook op de hoogere punten welig. Erica Tetralix is zeer gewoon; op het zand is zij zeldzamer, om op de zandstuivingen geheel door Calluna vulgaris vervangen te worden. Al heb ik de flora nooit uitsluitend ter karteering gebezigd, toch gebruikte ik haar dikwijls met vrucht als waarschuwing dat de ondergrond van karakter veranderde, hetgeen dan altijd aan boringen werd getoetst.

Naar het Noorden werd aanvankelijk de weg tot Stockum vervolgd en dezelfde leembank overal aangeboord. Hier wordt het terrein echter heuvelachtiger en wordt de leem eerst op grooter diepte (ongeveer 10 d.M.) aangetroffen. Naar mij medegedeeld werd moet de leembank hier minder dik wezen dan bij den Viersprong; gaarne zou ik hier mijn 15-meter-boor gebruikt hebben, doch om de kosten, welke daaraan verbonden zijn, moest ik dit opgeven. De bank werd verder noordelijk vervolgd langs Bensbergen en op de Hulpe en den Hemmel. In de onmiddellijke omgeving van den straatweg bestaat een korte onderbreking door zand; daarna verschijnt de leem weer met het karakter van de Viersprongleem, vet en rijk aan keien. Aan den Lokerhoek was het hier en daar twijfelachtig of men niet met tertiaire klei te doen had, die aan den Brinkerhoek en den Herikerberg duidelijk te voorschijn treedt, zonder dat het mij echter mocht gelukken fossielen daaruit te verzamelen. Het bovenst ligt een klei met kalkconcreties (mennekes); daaronder volgt een donkere klei met overblijfsels van hout. Aangezien mijn boren, die reeds twaalfmaal gebroken waren en steeds minder bestand bleken te zijn, een voortzetting van het onderzoek (dat bovendien om de bontheid der lagen vrij langdurig zou wezen) verboden, werd dit gedeelte tot een volgend jaar uitgesteld.

Nog een woord over de lagen, die ten Oosten en ten Westen de leem begrenzen. Deze beide zandvormingen liggen, afgezien van de zandstuivingen die er in voorkomen, lager dan het leemgebied; zij vormen de hellingen van den grooten leemrug. Het westelijke en oostelijke hellingzand verschillen onder anderen in gehalte aan skandinaafsche gesteenten; het oostelijke is daaraan namelijk rijker dan het westelijke; een nauwkeurige vergelijking was evenwel wegens den beperkten

tijd niet goed mogelijk. Waarschijnlijk is hun ontstaan verschillend te verklaren; het westelijke schijnt het uitwasschingsproduct van de grondmoraine te wezen; deze uitwassching had wellicht plaats onder medewerking van den »Rijn", daar het grootste deel der zeldzame keien een zuidelijk karakter bezit; het oostelijke verschilt in zwervelingen-gehalte minder van de keileem en zou dus wellicht, met uitzondering van de strook, die het leemgebied onmiddellijk begrenst, als oorspronkelijke gletscher-afzetting moeten worden beschouwd.

In beide zanden zijn zandstuivingen: aan het eigenaardig relief, aan de afwezigheid van zwervelingen, en aan de dorheid van den plantengroei herkenbaar — niet zeldzaam. Het westelijke is door een smalle strook zandstuivingen (duinen) gescheiden van het volkomen horizontale dalzand van de Schipbeek, uit welk zand zij of het hellingzand zich hier en daar als kleine bulten verheffen. Door den hoogen waterstand, die ook alle uitgravingen moeielijk toegaukelijk maakte, was het niet goed mogelijk ze nader te onderzoeken.

Ten slotte nog een paar voorloopige opmerkingen over de zwervelingen. Overeenkomstig mijn onderstelling is de Ålandsrapakivi in de keileem van den Viersprong algemeener dan de Ålandsgraniet; enkele der daar verzamelde gesteenten moeten nog onderzocht worden.

Alle belangrijke skandinaafsche gesteenten werden verzameld uit het leemgebied; Skolithuszandsteen is zoo algemeen dat ik, na een dozijn stukken bijeengebracht te hebben, van het verdere verzamelen afzag. Påskallavik-porfier is ook niet zeldzaam. Drie voorbeelden werden hiervan aangetroffen *), alle bij den Markelo-Goorschen rug; het zou dus mogelijk zijn dat wij hier met een keibaan te doen hadden. Onder de rapakivis is één zwerveling, waarschijnlijk van Finland afkomstig.

Al ligt het eenigszins voor de hand, na deze enkele mededeelingen een poging te wagen om een ontwerp voor de geologische kaart van Nederland uit te werken, toch geloof

---

*) Tot nog toe is mij dit gesteente in de litteratuur over Nederland niet bekend.

ik dat hiervoor de tijd nog niet is gekomen. Duitschland kan ons eenigszins tot waarschuwend voorbeeld strekken. De karteering begon aldaar in de omstreken van Berlijn. Hier ligt een horizontale bank van de onderste keileem; daarop volgt een zware zandlaag, en eindelijk een horizontale bank van bovenste keileem, oppervlakkig min of meer verweerd. In het zand bevinden zich beenderen van groote zoogdieren. Dit alles is o.a. bij Rixdorf in een reusachtige afgraving schematisch schoon te zien. Afgaande op de ondervindingen, bij Berlijn opgedaan, werden door de andere geologen regels en voorschriften samengesteld; had men o.a. bij een heuvel aan den voet en aan den top leem, op de hellingen zand, dan was dit onderste keileem, interglaciaal zand, en bovenste keileem. Een tweede en later punt van uitgang vormen de omstreken van Stettin. Hier is het intusschen niet zoo eenvoudig met den bouw van den bodem gesteld. Krijt ligt boven septarienklei, op Wollin zelfs vele meters dik op keileem; diluvium, tertiair en secundair zijn dooreen gekneed; keileem aan den voet van een heuvel mag niet meer onvoorwaardelijk als onderste keileem worden beschouwd. Het kostte veel moeite en onaangenaamheden om te doen erkennen, dat de behandeling of opvatting, die in de buurt van Berlijn bruikbaar is, voor Stettin niet gelden kan.

Nog minder gelukkig is men geweest met een vastgesteld voorschrift, dat de bovenste keileem, indien hij een dikte van minder dan 2 meter bezit, als »Reste des oberen Mergels", wanneer hij 2 of meer meter zwaar is, als »Oberer Mergel" moet worden gekarteerd. Het voorschrift is er nu eenmaal; dikwijls heeft men onderscheidingen te maken, die tegen de regels van het gezond verstand indruischen, maar, om de eenvormigheid van de kaart te redden, moet men op den ingeslagen weg, dien men elk jaar minder goed kan verlaten, voortgaan.

Het schijnt mij daarom wenschelijk, dat door verschillende onderzoekers op geologisch verschillende punten karteerproeven worden genomen. De vaststelling van een algemeene methode van behandeling zij van later zorg. Daarvoor moge ook deze proeve het hare bijdragen.

Het is mij gebleken, toen ik eens een punt van uitgang

had gevonden, dat het mij mogelijk was ongeveer 1 vierkanten kilometer per dag in kaart te brengen, soms veel meer, soms echter ook veel minder. Van veel belang is hiervoor natuurlijk een goede arbeider, zooals ik er een gedurende 4 dagen in dienst had, en bovendien goede werktuigen.

Van groot belang zal het echter zijn, voortaan ook van reserve-werktuigen voorzien te wezen.

Leiden, 20 Augustus 1891.

s

zsche

lo

leem,

vlakte

t zand

uaal-

telijk

lteluk

MEDEDEELINGEN OMTRENT DE GEOLOGIE VAN NEDERLAND, VERZAMELD DOOR DE COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK.

N°. 4.

KORT VERSLAG

VAN EENIGE GEOLOGISCHE WAARNEMINGEN IN HET DILUVIALE GEBIED VAN WEST-DRENTHE.

DOOR

Dr. H. VAN CAPPELLE.



In den zomer van 1891 heb ik mijn onderzoek van het diluvium van West-Drenthe voortgezet.

Ik ving aan met een nauwkeuriger onderzoek der heuvels, welke ik in de gemeente Havelte hier en daar had aangetroffen, en die ik in mijn voorlaatste verslag voor doorboringen van onderdiluviaal zand door de grondmoraine verklaard had. De onder den naam van »de Konijnenbergen" bekende heuvels ten Z.O. van de Havelter kerk waren het eerst aan de beurt.

De uitkomst van dit onderzoek was, dat de grondmoraine, die in de nabijheid aan de oppervlakte ligt, zich onder deze heuvels voortzet — een verschijnsel, waaruit de onjuistheid mijner ouderdomsbepaling werd aangetoond. Moesten deze heuvels dus voor eene postglaciale vorming verklaard worden, ook »de Berg" (eene aan de Hoofdvaart zich verheffende zandhoogte) bleek, evenals de Uffelter zandheuvels, tot het postglaciale diluvium te behooren.

Op mijne talrijke zwerftochten in den omtrek van Havelte

heidezand beslaat toch op mijn kaartje zulk een groote oppervlakte, dat het oudere diluvium meer dan de helft van zijne door STARING aangegeven oppervlakte aan deze jongere vorming zal moeten afstaan: het strekt zich nl. noordwaarts tot aan Wateren uit, slechts de hoogten van Diever, Wapse en Vledder-Doldersum onbedekt latende, terwijl ik ten Oosten van de lijn, die de dorpen Dwingelo, Ruinen en Echten vereenigt, een uitgestrekt gebied bereisde dat geheel door heidezand wordt ingenomen en waaronder overal op meer of minder groote diepte de grondmoraine ontwikkeld is.

Wanneer ik hier ten slotte nog bijvoeg, dat ik nabij laatstgenoemd dorp een merkwaardige doorsnede ontdekte, hetwelk mijne vroeger verkondigde meening bevestigt, als zoude het optreden van zuidelijke steensoorten in de grondmoraine ook in Drenthe een gevolg zijn van de ligging dezer vorming op glaciaal gelaagd gemengd of op Rijndiluvium — dan heb ik de voornaamste uitkomsten mijner in West-Drenthe gedane waarnemingen in het kort uiteengezet. Een uitvoeriger behandeling zal in een afzonderlijke studie over het diluvium van West-Drenthe geschieden.

Havelte, 25 Augustus 1891.



I & H v Langenhuysen 's Hage

OVER EEN VERBINDING AFGELEID VAN WIJNSTEENZUUR.

DOOR

E. MULDER.

Is dinatrium-wijnsteenzuur aethyl opgelost in aethylchloride, dan zet zich daaruit een lichaam af*). Het vloeibare gedeelte geeft na afschenken, bij verdampen der overmaat van aethylchloride en na behandeld te zijn in het gedeeltelijk waterstofledig, een verbinding, waaraan in 't vervolg voorloopig de naam zal worden gegeven van *het oplosbare product* (het is namelijk oplosbaar in alcohol, abs. aether en aethylchloride). Het afzetsel geeft na wasschen met abs. aether een lichaam, dat vooreerst zal genoemd worden *het onoplosbare product* (dit is onoplosbaar in deze oplossingsmiddelen). Het hoofddoel der volgende studie is, om een afgeleide te leeren kennen *van het oplosbare product*, de eerste *gekrystalliseerde* verbinding ontmoet onder de voornaamste ontledingsprodukten van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, en die scheen geschikt te kunnen wezen, om het mechanisme der reactie te leeren kennen, te weten *de wijze van omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van aethylchloride*. Men zal evenwel aanvangen met een vervolg te geven van het onderzoek betreffende eenige stoffen, waarvan reeds vroeger mededeeling werd gedaan, en wel vooral van de verbinding verkregen door zoowel het oplosbare als onoplosbare product in bijzijn van aethylchloride te ontleden met *chloorwaterstofgas*.

*) Zie *Verslagen en Mededeelingen* der Koninkl. Akad. v. Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, 3de Reeks, Deel VIII, p. 186, 190.

Analyse van het onoplosbare product. Tot nog toe zijn drie methoden aangewend om dit product af te zonderen, te weten:

a. oplossing en afzetsel zijn gezamentlijk behandeld, bevrijd van de overmaat aan aethylchloride, en vervolgens uitgetrokken met abs. aether;

b. oplossing en afzetsel zijn gezamentlijk uitgestort in abs. aether, de massa na bezinking afgeschonken, en het afzetsel gewasschen met abs. aether;

c. de oplossing wordt afgeschonken, en het afzetsel behandeld met abs. aether.

III. (Zie de vorige verhandeling I en II). In de volgende proef werd het product van twee bereidingen vermengd, waarbij methoden *b* en *c* waren gevolgd, die zamen ongeveer 16 gr. onoplosbaar product voortbrachten, afkomstig van 55 × 1,315 gr. wijnsteenzuur aethyl, 55 × 0,29 gr. natrium en 55 × 6 gr. zuiveren alkohol (er werd verhit tot en bij 60°). Aan het einde der proef, alvorens de aether is verdampt, vormt het onoplosbare product een geleiachtige massa, lichtgeel gekleurd, ten slotte een hard genoegzaam kleurloos lichaam.

Een hoeveelheid van 0,8849 gr. stof gaf 1,1375 gr. kooldioxyde en 0,2902 gr. water (er werd niet innig vermengd met de chromaten van lood en kalium);

0,7527 gr. leverde 0,0522 gr. chloorzilver op, bevattende 0 0129 gr. chloor (bepaling gedaan door den Heer DE VISSER);

0,9436 gr, stof liet na gloeing terug 0,4346 gr., gevende na behandeling met zoutzuur enz. 0,476 gr. chloornatrium, bevattende 0,18735 gr. natrium (D. V.).

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

			Bijgevolg zonder aethylchloride:
koolstof. . .	35,0	{ 33,9 { 1,1 van het aethylchloride	33,9
waterstof . .	3,6	{ 3,4 { 0,2 van het chloride	3,4
chloor . . .	1,7		
natrium. . .	19,9		19,9
zuurstof. . .	39,8		39,9
	100,0		97,0.

Berekend op 100 gew.-d. komt de samenstelling der verbinding zonder aethylchloride overeen met:

koolstof.	34,9
waterstof	3,5
natrium.	20,5.

IV. De volgende bepalingen zijn gedaan met een product verkregen, uitgaande van 35 × 1,315 gr. wijnsteenzuur aethyl, 35 × 0,29 gr. natrium en 35 × 6 gr. zuiveren alcohol (er werd eveneens verhit tot en bij 60⁰). De oplossing werd afgeschonken van het afzetsel, dat na wasschen met abs. aether ongeveer 9 gr. opleverde aan onoplosbaar product.

Een hoeveelheid van 0,9412 gr. stof gaf 1,227 gr. kooldioxyde en 0,3057 gr. water (D. V.);

0,6382 gr. leverde op 0,0371 gr. chloorzilver, bevattende 0,0092 gr. chloor;

1,0328 gr. van deze stof gaf na gloeing 0,4724 gr. residu, dat behandeld met zoutzuur enz. terugliet 0,5178 gr. chloornatrium, bevattende 0,2033 gr. natrium (D. V.).

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

			De verbinding zonder aethylchloride:
koolstof. . .	35,5	34,6 0,9 van het aethylchloride	34,6
waterstof . .	3,6	3,4 0,2 van het chloride	3,4
chloor . . .	1,4		
natrium. . .	19,7		19,7
zuurstof. . .	39,8		39,8
	100,0		97,5.

Op 100 gew.-d. berekend bevat derhalve de verbinding zonder aethylchloride:

koolstof.	35,4
waterstof	3,5
natrium.	20,2.

Men laat hieronder volgen de uitkomsten der analysen met bijvoeging van twee analysen reeds vroeger *) medegedeeld:

	I. a.	I. b.	II.	III.	IV.
koolstof . . .	34,8	34,7	34,6	34,9	35,4
waterstof . .	3,7	3,7	3,6	3,5	3,5
natrium . . .	—	—	—	20,5	20,2.

De gemiddelde samenstelling is bijgevolg voor het onoplosbare product:

koolstof.	34,9
waterstof	3,6
natrium	20,3,

en van het oplosbare product †), tevens na aftrekken van aethylchloride (eveneens berekend naar het gevonden gehalte aan chloor):

koolstof.	33,5
waterstof	3,6
natrium.	21,3.

Ter vergelijking laat men hieronder volgen een opgave der samenstelling van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl; van twee mol. van dit tartraat — 1 ($C_2H_5.OH$), zijnde een ester *van het tartrylwijnsteenzuur* (onbekend); en van twee mol. van dit tartraat — 2 ($C_2H_5.OH$), de ester van het *chinon van wijnsteenzuur* (onbekend):

	dinatrium-wijnsteenzuur aethyl:	dit tartraat — 1 ($C_2H_5.OH$):	dit tartraat — 2 ($C_2H_5.OH$):
koolstof . . .	38,3	37,0	35,3
waterstof. . .	4,8	4,0	2,9
natrium. . .	18,4	20,3	22,5.

Men vergete niet, dat zoowel het onoplosbare als oplos-

*) Zie l. c. pag. 190.

†) l. c. pag. 190.

bare product hygroscopische verbindingen zijn ; en dat men ook zal te doen hebben met secundaire reacties. Het oplosbare product is daarenboven niet vatbaar om te worden gezuiverd; wel het geval met het onoplosbare product, in zooverre, als dit met abs. aether kan worden behandeld.

Het onoplosbare product tegenover zuiveren alcohol. Bij 1,6 gr. van dit lichaam werden gedaan 6 gr. zuivere alcohol, het geheel in een buis, daarna toegesmolten. Na verloop van eenige weken werd de massa lichtgeel gekleurd, geleiachtig, en ten deele in geringe hoeveelheid met gele kleur opgelost.

Over het lichaam afgeleid van het oplosbare product met chloorwaterstofgas.

III. De oplossing *) van het oplosbare product in aethylchloride werd na de reactie geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur en ongebluschte kalk; er bleef terug een geleiachtige massa, die behandeld werd met abs. aether. Na verdamping dezer vloeistof, bleef een lijvige massa terug met licht geelroode kleur, moeielijk oplosbaar in water (wijnsteenzuur aether is daarin zeer gemakkelijk oplosbaar), de *kersroode* verkleuring gevende met ferridchloride.

Een hoeveelheid van 0,7671 gr. stof gaf 1,3145 gr. kooldioxyde en 0,4347 gr. water.

Voor alle zekerheid werd nog een chloorbepaling gedaan met kalk; uitgaande van 0,2285 gr. stof werd geen spoor chloorzilver gevormd.

IV. Er werd uitgegaan van de bereiding van een oplosbaar product, dat 10,4 p.c. chloor bevatte †). Een hoeveelheid van 5 gr. werd opgelost in 40 gr. aethylchloride, en ontleed met chloorwaterstofgas, onder afkoeling, zooals bij de vorige proeven. Bij herhaling der proef, werd de geleiachtige massa, aanvankelijk gevormd als vroeger, *volkomen opgelost* (van tijd tot tijd schuddende) zoodat een geheel

---

*) Vervolg der proef medegedeeld in de vorige verhandeling: *Verslagen en Mededeelingen* d. Koninkl. Akad. v. Wetensch., Afd. Natuurkunde, 3de Reeks, Deel VIII, p. 197.

†) l. c. pag. 186.

vloeibare massa terugbleef, slechts een weinig geelrood gekleurd. Met barytwater kon men zich overtuigen van het vrijkomen van *kooldioxyde*.

Gemelde oplossing werd gezet onder een exsiccator, en de terugblijvende lichtgeel gekleurde doorzichtige massa met abs. aether behandeld. Evenals in proef III bleef een geleiachtige massa terug (zie later over amorph chloornatrium).

a. Een hoeveelheid van 0,2715 gr. der stof, met aether afgezonderd, gaf 0,4791 gr. kooldioxyde en 0,163 gr. water (D. V.);

b. na eenigen tijd te hebben gestaan onder een exsiccator gaf 0,6393 gr. van hetzelfde product aan kooldioxyde 1,1191 gr. en 0,3774 gr. water (D. V.);

c. 0,6749 gr. stof gaf 1,1854 gr. kooldioxyde en 0,4005 gr. water (D. V.);

d. 0,7391 gr. stof gaf 1,2905 gr. kooldioxyde en 0,433 gr. water.

e. Er bleef nu en dan een kleine hoeveelheid eener zwarte stof terug in de bolletjes na verbranding, reden waarom tevens een bepaling werd gedaan in een schuitje. Een hoeveelheid van 0,4415 gr. stof gaf 0,7711 gr. kooldioxyde en 0,2645 gr. water.

Men geeft de uitkomsten dezer analysen berekend op 100 gew.-d., terwijl er twee analysen (I en II) van vroeger *) zijn bijgevoegd, gedaan door het oplosbare product op te lossen in *abs. aether* en te ontleden met zoutzuurgas:

	I.	II.	III.	IV.				
				a.	*b.*	*c.*	*d.*	*e.*
koolstof, .	46,3	48,2	46,7	48,1	47,7	47,9	47,6	47,6
waterstof .	6,5	6,5	6,3	6,7	6,6	6,6	6,5	6,7.

Het gemiddelde dezer uitkomsten leidt tot:

koolstof.	47,5
waterstof	6,5.

*) l. c. pag. 196.

Het onoplosbare product (afzetsel) met aethylchloride tegenover chloorwaterstofgas. Er werd uitgegaan van 5 gr, dezer stof (voor het koolstofgehalte was gevonden 35,5 p.c., zie pag. 147) en 36 gr. aethylchloride, dus genoegzaam van dezelfde verhouding als vroeger het geval was bij het doen der proef met het oplosbare product. Ook werd de massa gedaan in een v. buis, en ontleed met chloorwaterstofgas onder afkoeling (het onoplosbare product is onoplosbaar in aethylchloride, het oplosbare product daarentegen oplosbaar). Er ontstaat aanvankelijk een geleiachtige massa, die ten slotte geheel wordt opgelost, onder vorming van kooldioxyde, zooals geschiedt met het oplosbare product (slechts is dit opgelost in het aethylchloride). Hieruit volgt op nieuw vrij duidelijk, *dat oplosbaar en onoplosbaar product wel in hoofdzaak dezelfde structuur zullen hebben.*

De oplossing werd geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur en kalk, waarna een weeke volkomen doorzichtige eenigzins geel gekleurde massa terugbleef. Behandeld met abs. aether, bleef keukenzout in amorphen staat terug (hierover later), terwijl de aetherische oplossing, na te hebben gestaan onder een exsiccator, een dikvloeibare licht roodbruin gekleurde massa achterlaat.

a. Een hoeveelheid van 0,8578 gr. dezer stof gaf 1,4616 gr. kooldioxyde en 0,47 gr. water;

b. 0,469 gr. van hetzelfde product gaf 0,8073 gr. kooldioxyde en 0,2586 gr. water.

c. Na verscheiden weken onder een exsiccator te hebben gestaan, was de massa merkbaar *lijviger* geworden; ook was het geheel reeds bij den aanvang minder vloeibaar dan het overeenkomstig afgeleide met het oplosbare product. Een hoeveelheid van 0,5473 gr. leverde op 0.9613 gr. kooldioxyde en 0,2955 gr. water (bij het doen dezer analyse werd verbrand in een schuitje, bij de twee anderen was gebruik gemaakt van bolletjes).

Op 100 gew.-d. berekend komt dit overeen met:

	a.	*b.*	*c.*	gemiddeld:
koolstof. . .	46,5	46,9	47,9	47,1
waterstof . .	6,1	6,1	6,0	6,1.

Met water zondert zich een olieachtig lichaam af, als met het afgeleide van het oplosbare product het geval is, eveneens weinig oplosbaar. Ook wordt de waterige oplossing kersrood gekleurd door ferridchloride, en met phenylhydrazine een vloeibaar lichaam gevormd.

Vergelijking der samenstelling van het oplosbare en onoplosbare product, berekend in vrijen staat, met die der verbinding daaruit met chloorwaterstofgas afgeleid. Uitgaande, voor zooverre betreft het *oplosbare product*, van het gemiddelde *) der analysen (na aftrek van aethylchloride), heeft men:

koolstof	33,5
waterstof.	3,6
natrium	21,3
zuurstof	41,6
	100,0.

Bij verplaatsing van natrium door waterstof in verhouding der atoom-gewichten, wordt voor de samenstelling van het lichaam in vrijen staat gevonden:

koolstof.	33,5
waterstof 3,6 + 0,9 =	4,5
zuurstof.	41,6
	79,6

en berekend op 100 gew.-d. dezer stof in vrijen staat:

koolstof.	42,0
waterstof	5,6.

Van meer belang dan een vergelijken van het lichaam met zoutzuurgas afgeleid van het oplosbare product met dit laatste in vrijen staat, is dat van de overeenkomstige verbinding van het onoplosbare product verkregen met dit in vrijen toestand berekend, daar het onoplosbare product meer kans bezit scheikundig zuiverder te zijn, omdat het

*) Zie: *Verslagen en Mededeelingen* d. Koninkl. Akad v. Wetensch. Afd. Natuurkunde, 3de Reeks, Deel VIII, p. 190.

kan behandeld worden met abs. aether (terwijl het oplosbare product tot dusverre niet vatbaar is om te worden gezuiverd). De analysen van het *onoplosbare product* gaven voor de gemiddelde samenstelling *):

koolstof.	34,9
waterstof	3,6
natrium	20,3
zuurstof	41,2
	100,0.

Door verplaatsing van het natrium door waterstof in verhouding tot de atoom-gewichten, wordt verkregen voor het onoplosbare lichaam in vrijen staat:

koolstof.	34,9
waterstof 3,6 + 0,9 =	4,5
zuurstof.	41,2
	80,6

of op 100 gew.-d. der verbinding in vrijen staat:

koolstof	43,3
waterstof	5,6.

De uitkomsten zijn bijgevolg aldus terug te geven:

	opl. prod.	onopl. prod.	afgeleid met HCl van opl. prod.	afgeleid met HCl van onopl. prod.
koolstof . .	42,0	43,3	47,5	47,1
waterstof. .	5,6	5,6	6,5	6,1.

Uittreden van kooldioxyde doet gehalte aan koolstof en waterstof toenemen. Wanneer wordt verondersteld, dat alleen kooldioxyde is uitgetreden, dan moet de verhouding tusschen de koolstof (A) en de waterstof (B) der oorspronkelijke verbinding (verondersteld in vrijen staat op te treden), verminderd met de koolstof (x) uitgetreden (onder den

*) Zie deze Verhandeling pag. 148.

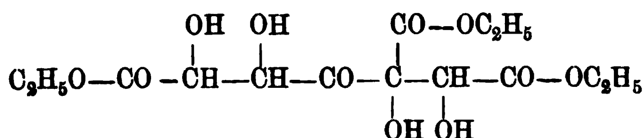
vorm van kooldioxyde), gelijk zijn aan de verhouding tusschen de koolstof (a) en de waterstof (b) der ontstane verbinding; bijgevolg heeft men de vergelijking:

$$\frac{A-x}{B}=\frac{a}{b}.$$

Past men deze vergelijking toe op het oplosbare product (in vrijen staat) en het lichaam met chloorwaterstofgas daarvan afgeleid, dan wordt gevonden $x=1{,}1$ $\left(\frac{42-x}{5{,}6}=\frac{47{,}5}{6{,}5}\right)$; dus zou $\left(\frac{42}{1{,}1}=38\right)$ 1 C zijn uitgetreden op 38 C der oorspronkelijke verbinding. Wat betreft het onoplosbare product $\left(\frac{43{,}3-x}{5{,}6}=\frac{47{,}1}{6{,}1}\right)$, zoo wordt voor x een waarde gevonden, die wel niet juist kan wezen. Maar men vergete niet, dat reeds bij den aanvang substitutie van Na door C_2H_5 kan hebben plaats gehad, in welk geval de samenstelling van het oplosbare en onoplosbare product in vrijen staat een *andere* is, dan werd verondersteld het geval te zijn; en dat het zoutzuurgas later van dezen rest kan doen uittreden tegelijkertijd met kooldioxyde.

Om eenige punten van vergelijking te hebben, zal men de samenstelling laten volgen van *tartrylwijnsteenzuur* aethyl (tot nog toe onbekend), van *monaethyltartrylwijnsteenzuur* aethyl (zie later), en van den aethylester van het *chinon van wijnsteenzuur* (onbekend).

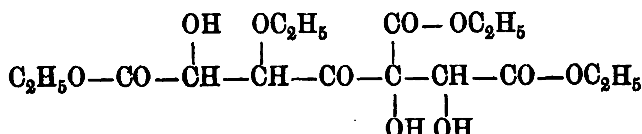
Tartrylwijnsteenzuur aethyl:



vordert:

koolstof	45,9
waterstof	6,0.

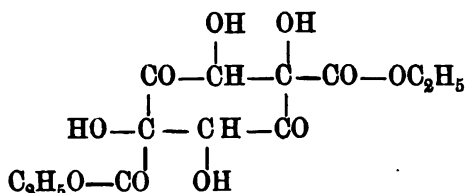
Monaethyltartrylwijnsteenzuur aethyl, zij dit:



eischt:

koolstof.	48,7
waterstof	6,6.

en de aethylester van het chinon van wijnsteenzuur:



vordert:

koolstof.	45,0
waterstof	5,0.

Het zou zeker voorbarig wezen, om reeds nu uitvoerig te handelen over de structuur onzer produkten (zie later), maar de samenstelling van brandigdruivenzuur aethyl en glycerinezuur aethyl (wier vorming trouwens niet waarschijnlijk is) schijnt niet te beantwoorden aan de verkregen analytische uitkomsten, want brandigdruivenzuur aethyl vordert:

koolstof.	51,7
waterstof. . , . . .	6,9

en glycerinezuur aethyl:

koolstof.	44,8
waterstof	7,5.

Böttinger *) heeft brandigdruivenzuur aethyl gemaakt, zijnde een vloeibaar lichaam, onder gewonen luchtdruk overgaande bij ongeveer 130° (trouwens onder gedeeltelijke ontleding); het lichaam met zoutzuurgas afgeleid van het oplosbare en onoplosbare product, laat zich zelfs niet in het gedeeltelijk ledig overhalen. Om een ontstaan van glycerinezuur aethyl aan te nemen, zou genoegzaam willekeurig zijn. Maar ook schijnen de eigenschappen der ontstane lichamen niet te beantwoorden aan hetgeen men van een chinon, zelfs van dat van het wijnsteenzuur met zijne vele hydroxyl's, heeft te wachten, en dan blijft over, als zijnde het meest waarschijnlijk, de vorming van *tartrylwijnsteenzuur.* Maar alvorens zich op dien weg verder te begeven, wenschte men nog eenige uitkomsten van onderzoekingen in een andere richting genomen, mede te deelen.

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, op 1 mol. verbonden met 1 mol. alcohol, tegenover aethylchloride. Tot nog toe werd uitgegaan van dit tartraat, zooveel mogelijk bevrijd van alcohol. Met 't oog op de producten gevormd en de uitkomsten van analyse, wilde men trachten een gedeeltelijke ontleding te voorkomen door dit tartraat te maken verbonden op 1 mol. met 1 mol. alcohol Onder die omstandigheden toch behoeft niet te worden verhit tot en bij 60°, om den alcohol zooveel mogelijk te verwijderen, maar is het voldoende te verhitten tot en bij 40° (als altijd in het gedeeltelijk waterstofledig); hierbij wordt verondersteld, dat het tartraat in een betrekkelijk groote hoeveelheid te gelijk wordt gemaakt (in welk geval de massa veelal betrekkelijk compact is). Maar het was in de eerste plaats noodig te weten, of het tartraat met 1 mol. alkohol zich wel laat omzetten door aethylchloride, in bijzijn van zulk een hoeveelheid alcohol.

De producten van inwerking werden geanalyseerd, alsmede het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, waarvan werd uitgegaan. Men laat hierbij de verkregen uitkomsten volgen, zoo ook een analyse van het gebruikte wijnsteenzuur aethyl (in een betrekkelijk groote hoeveelheid op eens gemaakt, en niet bij

*) *Ber. D. Ch. Ges.* Bd. 14, S. 317.

herhaling gedestilleerd, anders zou het zuiverder hebben kunnen zijn; dat trouwens veel tijd vordert), en daarboven een (nieuwe) analyse, bijkans te gelijkertijd gedaan met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bevrijd van alkohol, tevens als middel ter vergelijking.

A. Een hoeveelheid van 0,7619 gr. wijnsteenzuur aethyl (niet bij herhaling overgehaald) gaf 1,2794 gr. kooldioxyde en 0,4731 gr. water;

B. 1.0478 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, van alcohol bevrijd, gaf 1,3967 gr. kooldioxyde en 0,5111 gr. (en werd niet innig vermengd);

C. *a*. 0,8683 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, ongeveer 1 mol. alcohol bevattende gaf 1,2281 gr. kooldioxyde en 0,4902 gr. water (niet innig vermengd); zie over de bereiding later.

b. 0,7972 gr. van hetzelfde product gaf 1,1366 gr. kooldioxyde en 0,4473 gr. water (niet innig vermengd); zie hierboven.

Berekend op 100 gew.-d, komt dit overeen met:

	A. wijnsteenzuur-aethyl:	B. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl zonder alc.	C. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met ongeveer 1 mol. alc. *a*.	*b*.
koolstof. .	45,8	36,4	38,6	38,9
waterstof .	6,9	5,4	6,3	6,2.

De theorie eischt voor:

	A.	B.	C.
koolstof. .	46,6	38,3	40,5
waterstof .	6,8	4,8	6,1.

Men begrijpt, dat B en C in ieder geval niet scheikundig zuiver zullen kunnen zijn als gevolg van secundaire reacties, die wel niet te ontgaan zijn.

Een hoeveelheid van 35 × 1,315 gr. wijnsteenzuur aethyl, 35 × 0,29 gr. natrium en 35 × 6 gr. zuiveren alcohol werd omgezet in dinatrium-wijnsteenzuur aethyl verbonden met 1 mol. alcohol, de bekende methode volgende, alleen met dit verschil, dat werd verhit tot en met 40°. Bij het

einde der bereiding bedroeg het gewicht 66,756 gr., terwijl de theorie eischt 65,275 gr. (bevrijd van alcohol is dit 55,125 gr.). Bij 64,6 gr. van dit product werd gevoegd 35 × 3 gr. aethylchloride, het geheel in een buis, daarna toegesmolten, als naar gewoonte. Reeds na ongeveer twee uur was het tartraat opgelost door den invloed van den aanwezigen alcohol (er werd van tijd tot tijd geschud). Daarentegen werden vele dagen vereischt, alvorens de omzetting zich *openbaarde* door de vorming van afzetsel. Voor die omzetting werd de noodige tijd gelaten, te weten ongeveer vier weken (een caoutchouc-ring leert nagenoeg den tijd kennen, wanneer geen afzetsel meer ontstaat). De oplossing werd vervolgens afgeschonken (van het afzetsel) in een kleinen ballon, in verbinding gebracht met de kwikpomp. De terugblijvende gomachtige massa woog 37,245 gr., door verhitten bij (20° tot 36,115 gr.) 30° tot 28,885 gr. herleid aan *oplosbaar* product (voor deze bewerking werden ongeveer 14 dagen gevorderd, terwijl iederen dag werd verhit gedurende drie uur; de dissociatie vereischt meer tijd en een hoogere temperatuur dan het geval is met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl zonder alcohol).

Het afzetsel werd behandeld met abs. aether tot geen noemenswaardige hoeveelheid meer werd uitgetrokken; er bleef 10,43 terug aan *onoplosbaar* product. De aetherische oplossing liet nog 8,15 gr. terug aan *oplosbaar* product.

Het oplosbare product is wel hetzelfde als dat verkregen met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bevrijd van alcohol; b.v. wordt het, blootgesteld aan vochtige lucht, evenzoo omgezet in een geleiachtige massa, zonder kristallen te vertoonen van neutraal wijnsteenzuur natrium.

a. Een hoeveelheid van 1,0299 gr. stof gaf 1,2635 gr. kooldionyde en 0,4053 gr. water (er werd tamelijk weinig vermengd);

b. 1,2094 gr. van hetzelfde product gaf 1,4801 gr. kooldioxyde en 0,4748 gr. water (er werd innig vermengd);

c. 0,6975 gr. gaf 0,3364 gr. chloorzilver, bevattende 0,08318 gr. chloor;

berekend op 100 gew.-d. stemt het voorgaande met:

	a.	b.	c.		verb. zonder chloride:	op 100 gew.-d. z. chloride:
koolstof. .	33,4	33,4	—	25,4 verb. / 8,0 v. chloride	25,4	32,4
waterstof .	4,4	4,4	—	2,7 verb. / 1,7 v. chloride	2,7	3,4
chloor. . .	—	—	11,9			
natrium en zuurstof. .	50,3				50,3	
					78,4.	

Het gehalte aan koolstof is bij gevolg een weinig lager dan in den regel het geval is bij het oplosbare product, afgeleid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl *bevrijd van alcohol.*

Het *onoplosbare* product (afzetsel) leverde de volgende uitkomsten op. Een hoeveelheid van 0,5754 gr. stof gaf 0,7388 gr. kooldioxyde en 0,1897 gr. water;

0,4835 gr. van hetzelfde product gaf 0,0333 gr. chloorzilver, bevattende 0,0082 gr. chloor.

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

			verondersteld vrij van chloride:
koolstof.	35,0	33,9 verb. / 1,1 chloride	33,9
waterstof	3,7	3,5 verb. / 0,2 chloride	3,5
chloor.	1,7		
natrium en zuurstof.	59,6		59,6
	100,0		97,0

bij gevolg berekend op 100 gew.-d.:

koolstof	34,9
waterstof	3,6,

dat zamenvalt (ten deele wel toevalligerwijze) met het gemiddelde der analysen van het *onoplosbare* product afgeleid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl *bevrijd van alcohol* (zie pag. 148). Herinneren wij er aan, dat het *onoplosbare* product meer kans zal hebben om betrekkelijk zuiver te zijn dan het

aplosbare product, daar dit laatste tot nog toe niet is te zuiveren, terwijl het *onoplosbare* product met ads. aether kan worden uitgetrokken.

Ook werd nog een onderzoek ingesteld naar het lichaam afgeleid van het *oplosbare* product (opgelost in aethylchloride) door ontleding met *chloorwaterstofgas*. Een hoeveelheid van 11 gr. van dit oplosbare product (uitgaande van dinatrium-wijusteenzuur aethyl *met* 1 *mol. alcohol*) werd opgelost in 70 gr. aethylchloride, en ontleed met chloorwaterstofgas in overmaat. De massa, aanvankelijk geleiachtig geworden, eindigde met dunvloeibaar te worden; bij gevolg bleef het chloornatrium in oplossing als in vorige proeven (met een oplosbaar product afgeleid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, bevrijd van alcohol) onder soortgelijke omstandigheden. Na geplaatst geweest te zijn onder een exsiccator, werd de terugblijvende massa vele malen uitgetrokken met abs. aether. Het chloornatrium treedt ook dan op als een geleiachtige massa (na verdamping van den aether vormende een amorph lichaam met licht gele kleur; zie later). Tevens laat de aetherische oplossing een dikvloeibare massa terug (ongeveer 5,5 gr.) een weinig rood-bruin gekleurd.

Een hoeveelheid van 0,3874 gr. dezer stof gaf 0,6847 gr. kooldioxyde en 0,2352 gr. water (de stof was bevat in een schuitje), dat op 100 gew.-d. overeenkomt met:

koolstof	48,2
waterstof	6,8.

Over amorph chloornatrium *). Bij inwerking van chloorwaterstofgas op de oplossing van *oplosbaar* product (der bereidig III †)) in aethylchloride, blijft na verdampen van dit chloride een geleiachtige massa terug, die bij herhaling behandeld met watervrijen aether, chloornatrium terug laat, evenzoo (zie boven) als een geleiachtig lichaam, dat geplaatst onder een exsiccator een amorphe stof teruglaat met licht gele kleur.

---

*) *Zie Verslagen en Mededeelingen* der Koninkl. Akad. v. Wetensch. Afd. Nat., 3de Reeks, Deel VIII, pag. 197.

†) Zie deze Verhandeling pag. 149.

Een hoeveelheid van 2,0702 gr. dezer stof gaf 0,3769 gr. kooldioxyde en 0,1411 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof	4,9
waterstof	0,7,

bij gevolg is het gehalte aan koolstof hooger dan vroeger werd gevonden voor het lichaam verkregen bij ontleding van een aetherische oplossing van een *oplosbaar* product met chloorwaterstofgas. Zelfs onder den microscoop is niets te zien van een kristallijne structuur.

Uitgaande van een *oplosbaar* product van een andere bereiding (IV *)), onder dezelfde omstandigheden werkende alleen met dit verschil, dat men het chloornatrium langer liet uittrekken met aether (in ieder geval eenige dagen), erlangde men een amorphe stof met analoge eigenschappen.

1,2552 gr. gaf 0,1694 gr. kooldioxyde en 0,0727 gr. water; bij gevolg op 100 gew.-d. bevattende:

koolstof	3,7
waterstof	0,6.

Het *onoplosbare* product geeft verdeeld in aethylchloride (waarin het onoplosbaar is) bij ontleding met chloorwaterwaterstofgas enz. eveneens amorph chloornatrium.

Een hoeveelheid van 0,7696 gr. dezer stof gaf 0,1158 gr. kooldioxyde en 0,0526 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof	4,1
waterstof	0,8.

Het amorphe chloornatrium bevat dus in de voorgaande gevallen een betrekkelijk niet te veronachtzamen hoeveelheid bijgemengde stof. Het is duidelijk, dat chloornatrium in

*) Zie deze Verhandeling, p. 147.

zuiveren staat optredende wel niet amorph zal kunnen zijn; toch werd een poging gewaagd, om deze bijkomende stof tot een minimum te herleiden. Na te zijn behandeld met abs. aether (te weten het lichaam afgeleid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl *verbonden met* 1 *mol. alcohol*), werd het amorphe chloornatrium uitgetrokken met *gewonen abs. alcohol*. Onder deze omstandigheden ontstaât echter een halfvloeibare onoplosbare massa (wel als gevolg van het water in den alcohol aanwezig) die, geplaatst onder een exsiccator, een *kleurloos amorph* lichaam teruglaat, met het voorkomen meer of min van *krijt*. Een hoeveelheid van 1,1122 gr. dezer stof gaf 0.0212 gr. kooldioxyde en 0,0211 gr. water, op 100 gew.-d. ovoreenstemmende met:

koolstof	0,5
waterstof.	0,2.

Methode om kristalliseerbare zouten om te zetten in amorphen toestand. In plaats van het oplosbare en onoplosbare product in bijzijn van aethylchloride te ontleden met zoutzuurgas, zou men zich kunnen bedienen van broomwaterstof, ioodwaterstof, zwavelwaterstof enz., wellicht ook van zuren als azijnzuur enz., en zich waarschijnlijk alzoo vele zouten kunnen verschaffen in *amorphen staat*, die anders gekristalliseerd zijn (altijd verondersteld, dat het chloornatrium in gemelde gevallen in waarheid *amorph* is). Door dezen weg ook in andere richtingen te vervolgen, kunnen zeker merkwaardige feiten ontdekt worden. Het zou hier niet de geschikte plaats zijn, om dergelijke onderzoekingen te nemen; daarom zij het voldoende, de aandacht te hebben gevestigd op een onderwerp, dat wel de belangstelling waard is.

Het oplosbare product opgelost in aethylchloride tegenover kooldioxyde. Laat men kooldioxyde in overmaat gaan door deze oplossing, dan ontstaat geen neêrslag. Na verdamping blijft een massa terug, die zich naar 't schijnt niet onderscheidt van het oorspronkelijke product. Deze reactie moet evenwel nog nader worden vervolgd. Verzadigd met water-

damp, deed dit gas evenmin een neêrslag ontstaan ; ook deze reactie is uitvoeriger na te gaan.

HET OPLOSBARE EN ONOPLOSBARE PRODUCT IN WATERIGE OF ALCOHOLISCHE OPLOSSING TEGENOVER EENIGE ZOUTEN.

Oplosbaar product. Laat men een *waterige* oplossing van het oplosbare product eenigen tijd staan, b.v. van 1,7 gr. in 10 gr. water, dan ontstaat geen neêrslag met een waterige oplossing van

zwavelzuur en azijnzuur cuprioxyde en cuprichloride,
zwavelzuur en azijnzuur zink, en van
mercurichloride.

De oplossing schijnt evenmin te worden neêrgeslagen door zilvernitraat (alleen ontstaat chloorzilver). Wel daarentegen door calciumchloride en tevens door azijnzuurlood. Wordt een kristal van zwavelzuur koper gedaan in gemelde oplossing, dan ontstaat evenmin een neêrslag, en een kristal van ferrosulfaat (met een weinig olijfolie, om oxydatie door de lucht te voorkomen) doet slechts een roodbruine verkleuring ontstaan.

In *alcoholische* oplossing wordt het oplosbare product niet neêrgeslagen door een alcoholische oplossing van cupriacetaat of cuprichloride ($+ H_2O$), azijnzuur zink ($+ 3 H_2O$), azijnzuurlood ($+ 3 H_2O$) en zilvernitraat (genomen in de verhouding uitgedrukt door Ag en Na), Laatstgenoemde oplossing wordt evenwel langzamerhand roodbruin gekleurd, om ten slotte een lichaam van deze kleur te doen afzetten. Daarentegen wordt een alkoholische oplossing van het oplosbare product neêrgeslagen door een zoodanige oplossing van calciumchloride.

Onoplosbaar product. Een *waterige* oplossing, versch gemaakt of na staan, geeft geen neêrslag met cuprichloride (genomen werd een oplossing van 0,5 gr. der stof in 3 gr. water, en 0,327 gr. cuprichloride in 2 gr. water), alleen

wordt eenige gasontwikkeling (wel kooldioxyde) duidelijk waargenomen. Andere zouten werden niet beproefd.

Wordt bij het onoplosbare product gedaan van een *alcoholische* oplossing van cuprichloride, dan vormt zich een amorphe koperverbinding, die onoplosbaar is in alcohol.

Het oplosbare product in alcoholische oplossing tegenover eenige zouten BIJ AANWEZIGHEID VAN WATER. Wordt de *alcoholische* oplossing van het product vermengd met water, en daarbij *terstond* gevoegd van een *waterige* oplossing

van azijnzuur lood,
mercurichloride,
zwavelzuur en azijnzuur koper, of cuprichloride,
zwavelzuur of azijnzuur zink,
zilvernitraat en calciumchloride,

dan ontstaat een neêrslag. Zilvernitraat geeft een volumineuse massa, die ontleed wordt door het zonlicht onder vorming van een metaalspiegel (tevens vertoont zich chloorzilver).

In plaats van gemelde methode te volgen, kan het betrokken zout in *water* worden opgelost, en daarbij de *alcoholische* oplossing van het oplosbare product worden gevoegd; of ook (zie later) kunnen de *alcoholische* oplossingen van product en zout met elkander worden vermengd, en dan dit mengsel in *water* worden uitgestort.

Overigens moet onder vrij wel bepaalde omstandigheden worden gewerkt. B.v. uitgaande van 3 gr. oplosbaar product opgelost in 25 gr. alcohol, en deze oplossing uitstortende in 100 gr. water, en daarbij onmiddellijk voegende 3 gr. zwavelzuur zink opgelost in 50 gr. water (bij gevolg in een verhouding uitgedrukt door Zn en 2 Na), wordt het geheel geleiachtig, na eenigen tijd ten deele in een gekristalliseerde verbinding overgaande, terwijl de grootste hoeveelheid wordt opgelost.

BIJZONDER ONDERZOEK DER KOPERVERBINDING.

Worden 2,6 gr. van het oplosbare product opgelost in

25 gr. gewonen abs. alcohol en deze oplossing gedaan bij die van 5 gr. cuprisulfaat opgelost in 50 gr. water (beantwoordende aan de verhouding uitgedrukt door Cu en Na), dan ontstaat een afzetsel, dat, na wasschen met water en plaatsen onder een exsiccator, een product vormt met licht groene kleur, onder den microscoop zich voordoende als te bestaan uit *prismatische naalden*. Brengt men een geringe wijziging aan, daarin bestaande, dat gezegde alcoholische oplossing wordt uitgestort in 100 gr. water en hierbij wordt gedaan de waterige oplossing van het zwavelzuur koper, dan vormt zich eveneens een afzetsel, dat (na wasschen met water en staan onder een exsiccator) wel eenigermate den indruk geeft van kristallijn te wezen, maar daarvan onder den microscoop niets doet blijken, dus als amorph is te beschouwen. De opbrengst is evenwel in die twee gevallen genoegzaam even groot, te weten ongeveer 0,1 gr. van 1 gr. oplosbaar product, dus betrekkelijk weinig, waarin werd getracht verbetering te brengen. Daartoe werd bij de alcoholische oplossing van het oplosbare product een oplossing gevoegd van natriumaethylaat in de verhouding uitgedrukt door Na en Cl (daarvan uitgaande, dat aethylchloride een deel uitmaakt van het molecuul, en het chloor daarin niet als chloornatrium voorkomt), en deze oplossing gedaan bij de waterige oplossing van cuprisulfaat (Cu op Na). Het gevormde neêrslag heeft evenwel meer een groenblauwachtige kleur, en onderscheidt zich door zijn onoplosbaarheid in alcohol (zie later).

In een andere proef was bij de alcoholische oplossing van het oplosbare product (er werd uitgegaan van zuiveren alcohol) natriumaethylaat gedaan (in de verhouding van Na en Cl). Na eenige maanden te hebben gestaan, was afgezet van een kristallijne stof (wel chloornatrium), de oplossing langzamerhand roodbruin gekleurd en meer of min lijvig geworden. Na vermenging met zwavelzuur koper enz., als vroeger, werd ook een afzetsel gevormd, maar van een groenvuile kleur en *on*oplosbaar in alcohol; deze weg is dus evenmin te volgen.

De opbrengst aan de gekristalliseerde koperverbinding zou

wellicht kunnen bevorderd worden door de alcoholische oplossingen van oplosbaar product en koperzout te *vermengen*, voor het laatste dan in dit geval b.v. te nemen cuprichloride (+ H_2O). Een hoeveelheid van 3 gr. oplosbaar product werd opgelost in 24 gr. gewonen abs. alkohol, en het cuprichloride, waarvan men de hoeveelheid liet veranderen, werd opgelost in 12 gr. alcohol; deze oplossingen werden innig vermengd, voor alle zekerheid gefiltreerd, en dit mengsel vervolgens uitgestort in 50 gr. water.

De kristallijne koperverbinding vertoont zich dadelijk, uitgaande van de verhouding tusschen koperzout en oplosbaar product uitgedrukt door Cu en 4 Na (als grondslag nemende de natriumbepaling van het oplosbare product); ook wordt onder deze omstandigheden de geheele massa meer of min geleiachtig. Na een half uur staans werd gefiltreerd, gewasschen met water, vervolgens de volumineuse massa ontdaan van water door plaatsen tusschen filtreerpapier, en daarna het lichaam gezet onder een exsiccator. De opbrengst is hieronder opgegeven, uitgaande van betrekkelijk verschillende hoeveelheden cuprichloride (+ H_2O) uitgedrukt in gr. en berekend op 3 gr. oplosbaar product:

hoeveelheid cuprichloride:	opbrengst aan de kristallijne koperverbinding:
1,707 gr.	0,314 gr.
1,053 »	0,53 »
0,853 »	0,565 »
	0,59 »
	0,57 »
	0,653 »
	0,56 »
	0,661 »
0,653 »	0,529 »
0,427 »	0,15 »

De hoeveelheid van 1,707 gr. komt overeen met de verhouding uitgedrukt door Cu en 2 Na, uitgaande van 3 gr. oplosbaar product; bij gevolg komt die van 0,853 gr. overeen met Cu en 4 Na en 0,427 gr cuprichloride met Cu en 8 Na.

Uit het voorgaande volgt wel, dat de opbrengst aan de kristallijne koperverbinding wordt bepaald door een maximum en minimum aan gebruikt cuprichloride.

De gemelde reactie en de aanwezigheid van water. Zal de reactie kunnen plaats hebben, dan is aanwezigheid van water wel een vereischte. Het was niet zonder gewicht, om die omstandigheden nog eenigermate te wijzigen. B.v. werd de omgekeerde weg ingeslagen, en (langzamerhand) *water* gedaan bij de alcoholische oplossing van oplosbaar product en cuprichloride, onder overigens gelijke omstandigheden (er werd genomen Cu op 4 Na). De opbrengst is ongeveer dezelfde.

Het mengsel der alcoholische oplossing van oplosbaar product en cuprichloride werd geplaatst onder een exsiccator, Van de gekristallieeerde koperverbinding werd niets afgezet, en er bleef slechts een amorphe massa terug, na verdampen van den alcohol, met groene kleur, oplosbaar in alcohol, en aan abs. aether geen noemenswaardige hoeveelheid aan stof afgevende. Bij behandeling met *water*, ontstaat van de kristallijne koperverbinding; de hoeveelheid is overigens betrekkelijk minder.

Over de betrekkelijke hoeveelheid gebruikt cuprichloride. De alcoholische oplossing van het oplosbare product heeft een alkalische reactie. Wordt er van een alcoholische oplosoplossing van cuprichloride aan toegevoegd in de verhouding uitgedrukt door Cu en 8 Na, ook dan is de reactie nog alkalisch, niet het geval met de verhouding Cu en 4 Na.

Men veronderstelle eens, dat in het oplosbare produc het chloor niet aanwezig is in den vorm van aethylchloride, maar als natriumchloride Cl Na, of, hetgeen in den grond voor ons doel op hetzelfde neêrkomt, dat er natriumchloride ontstaat op het oogenblik zelf der reactie met *water*. Als gemiddelde samenstelling voor het oplosbare product werd gevonden *):

---

*) Zie de vorige Verhandeling pag. 190.

koolstof	34,3
waterstof	5,4
chloor . . . . . ,	10,5
natricum	17,2
zuurstof	33,5
	100,0.

In de veronderstelling, dat het chloor in het molecuul aanwezig is als natriumchloride, of deze verbinding ontstaat bij aanwezigheid van *water*, blijft er slechts 17,2—6,8 = 10,4 p.c. natrium beschikbaar, want 10,5 gew.-d. chloor vorderen 6,8 gew.-d. natrium. Deze hoeveelheid van 10,4 gew.-d. natrium eischen 34,8 gew.-d. cuprichloride ter vorming van chloornatrium, of op 1 gr. oplosbaar product 0.343 gr. cuprichloride ($Cu\ Cl_2 + H_2\ O$), bij gevolg op 3 gr. van dit product 0,343 gr. × 3 = 1,029 gr. aan dit koperzout. Deze hoeveelheid nu van cuprichloride valt zoo ongeveer samen met het maximum aan opbrengst. Maar er blijft toch na te gaan, waardoor de gekristalliseerde verbinding zoo blijft beneden de theoretische hoeveelheid. Het doel, dat men zich voorstelde met de alcoholische oplossing van oplosbaar product en b.v. cuprichloride (hetzij afzonderlijk, hetzij vermengd) te behandelen met *water*, was, om aldus te trachten het verzeepingsproces te ontgaan, welk laatste om zoo te zeggen volkomen moet wezen bij oplossen van het oplosbare product als zoodanig in water (en vooral na staan); en daarenboven was het doel, om aldus een gekristalliseerde en zuivere verbinding te bekomen. Het schijnt wel, dat dit doel is bereikt, ongerekend de betrekkelijk geringe hoeveelheid, welke ontstaat van deze kristallijne koperverbinding.

Samenstelling en eigenschappen der kristallijne koperverbinding. In den regel werd geanalyseerd een product gemaakt uitgaande van de verhouding, uitgedrukt door Cu en 4 Na. De kalkmethode leerde het lichaam kennen als vrij te zijn van *chloor*.

I. Een hoeveelheid van 0,299 gr. der verbinding liet na gloeiing over 0,0522 gr. cuprioxyde. Het terugblijvende ...d behandeld met water, dat, na te zijn afgeschonken,

geen alkalische reactie vertoonde, noch de reactie op *chloor* met (zilvernitraat). Na droging en opnieuw te zijn gegloeid, was de hoeveelheid cuprioxyde onveranderd gebleven, te weten 0,0522 gr. bevattende 0,0416 gr. koper.

II. Van een andere bereiding gaf een hoeveelheid van 0,4317 gr. stof 0,6618 gr. kooldioxyde en 0,2137 gr. water.

III. Het product eener derde bereiding werd omgekristalliseerd uit warmen alcohol. Een hoeveelheid van 0,3432 gr. stof gaf 0,5241 gr. kooldioxyde en 0,1749 gr. water. Een hoeveelheid van 0,4167 gr. stof gaf 0,0725 gr. cuprioxyde, bevattende 0,0579 gr. koper.

IV. De moederloog van III werd geplaatst onder een exsiccator, de massa, na verdamping teruggebleven, behandeld met abs. aether onder verwarming, en alzoo het product omgekristalliseerd. Een hoeveelheid van 0 364 gr, gaf bij gloeiing 0,0632 gr. cuprioxyde, bevattende 0,0505 gr. koper (M. D. V.)

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

	I.	II.	III.	IV.
koolstof . .	—	41,8	41,6	—
waterstof . .	—	5,5	5,7	—
koper . . .	13,9 (13,91)	—	13,9 (13,89)	13,9 (13,86)

De koperverbinding is genoegzaam onoplosbaar in water, zelfs bij verwarming. Zij is daarentegen oplosbaar in gewonen abs. alcohol en abs. aether, vooral bij verwarming, en betrekkelijk oplosbaarder in alcohol dan in aether. De alcoholische oplossing wordt neêrgeslagen door water.

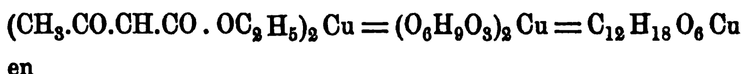
Uit alcohol en aether kan de verbinding kristalliseeren in betrekkelijk groote kristallen, zijnde *prismatische naalden*, dubbelbrekend, en van een schoone lichtgroene kleur. Geplaatst onder een exsiccator met zwavelzuur en zelfs met natrium, blijven de kristallen hun glans behouden.

Bij verhitting smelt de verbinding onder ontleding bij ongeveer 136°, maar het smeltpunt is zeer lastig te bepalen. De groene kleur verandert dan, en wordt vuil donker groen; tevens vertoonen zich druppels van een vloeistof met zure

reactie en een doordringenden reuk. Na bekoeling behandeld met alcohol onder verwarming, ontstaat een oplossing, die een weing vuil groen is gekleurd; om kort te zijn, het molecuul is ontleed. Zoowel de alcoholische als aetherische oplossing der verbinding wordt *kersrood* gekleurd door een waterige oplossing van ferridchloride, welke gekleurde verbinding wordt ontleed door zoutzuur en sodaloog.

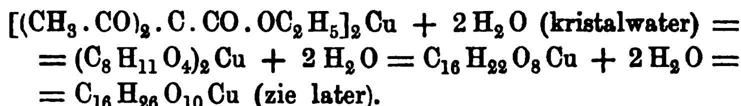
Ten einde de verbinding nog wat nader te leeren kennen, werd deze, in water verdeeld, behandeld met natriumhydroxyde. De groene kleur maakt dan plaats voor een groenblauwe; er ontstaat *geen blauw gekleurde oplossing*. Zooals bekend, wordt het neutrale koperzout van wijnsteenzuur in sodaloog opgelost met *blauwe* kleur. Ter controle werd tevens een mengsel gemaakt van *mononatrium-wijnsteenzuur aethyl* en *cuprichloride* in *alcoholische* oplossing, gevende een schoon *blauwe* oplossing (de genomen verhouding was uitgedrukt door 2 Na en Cu). Wordt deze oplossing uitgestort in water, dan blijft de blauwe kleur genoegzaam onveranderd; er ontstaat een weinig afzetsel, dat trouwens na eenigen tijd verdwijnt.

Het verdient te worden opgemerkt, dat de kristallijne koperverbinding nog al gemeenschap vertoont met de afgeleide koperverbinding van acetylazijnzuur aethyl *) en diacetylazijnzuur aethyl †):



$$(CH_3.CO.CH.CO.OC_2H_5)_2Cu = (C_6H_9O_3)_2Cu = C_{12}H_{18}O_6Cu$$

en



$$[(CH_3.CO)_2.C.CO.OC_2H_5]_2Cu + 2H_2O \text{ (kristalwater)} =$$
$$= (C_8H_{11}O_4)_2Cu + 2H_2O = C_{16}H_{22}O_8Cu + 2H_2O =$$
$$= C_{16}H_{26}O_{10}Cu \text{ (zie later)}.$$

Ook deze koperverbindingen zijn oplosbaar in alcohol (de laatste verbinding bevrijd van kristalwater). De eerste verbinding bezit evenzoo een *groene kleur*, daarentegen is de

*) Zie: Liebig's *Ann. des Chem.* Bd. 188, 269 (1877); *Hand. d. Org. Chem.* Beilstein (1886), Bd. I, S. 540; Dict. Wurtz, *Supplém. art. acétylacétique (éther)*, p. 80.

†) l. c. Beilstein. S. 611.

andere (met kristalwater) *blauw* gekleurd (het kristalwater verliezende onder een exsiccator met zwavelzuur).

De koperverbinding (afgeleid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl) is onoplosbaar in een waterige oplossing van cuprichloride (zonder en met chloornatrium). Na ontleding met natriumhydroxyde, wordt het koper dezer verbinding afgezet (zie vroeger), en na filtratie, het filtraat *kersrood* gekleurd door ferridchloride in overmaat (voor al goed te zien na filtratie van gevormd ferrid-hydroxyde); het koper mag dus wel geacht worden door natrium te zijn verplaatst.

In water verdeeld, wordt de koperverbinding ontleed met verdund zoutzuur, waarbij alles wordt opgelost. Het schijnt derhalve, dat de verbinding in vrijen staat, namelijk als ester, *oplosbaar* is in water, ook wordt de oplossing, na te zijn alkalisch gemaakt met natrium-hydroxyde en filtratie der ontstane onoplosbare koperverbinding, door ferridchloride evenzoo *kersrood* gekleurd (tevens vooral goed te zien na filtratie).

Verhoudingsformule der kristallijne koperverbinding. De producten van verschillende bereidingen, betrekkelijk nog al uiteenloopende (*niet* omgekristalliseerd en omgekristalliseerd uit *alcohol* en *aether*), gaven zoo ongeveer gelijke uitkomsten (zie pag. 169). Uitgaande van eenige gegevens betreffende de verhouding tusschen *koolstof* en *koper*, b.v. van de volgende:

koolstof.	41,8
koper.	13,9,

heeft men, deelende door de atoomgewichten:

$$\frac{41,8}{11,97} = 3,492; \ \frac{13,9}{63,3} = 0,219,$$

terwijl het quotiënt dezer twee getallen is $\frac{3,492}{0,219} = 15,94$; zoodat er zestien atomen koolstof (C_{16}) zouden zijn op een atoom koper (Cu).

Voor de zuurstof wordt gevonden O_{11}, terwijl waterstof zou kunnen zijn H_{24}. De formule $C_{16}H_{24}CuO_{11}$ ($C = 11,97$; $O = 15,97$; $Cu = 63,3$) eischt:

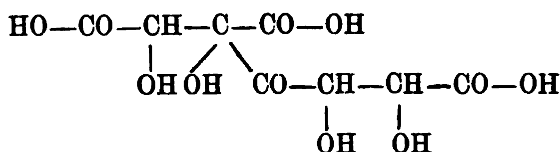
	gevonden:	berekend:
koolstof . . .	41,8; 41,6	42,1
waterstof. . .	5,5; 5,7	5,3
koper. . . .	13,9; 13,9; 13,9	13,9.

Uitgaande van de *koper*bepaling (13,9), die van hoogst eenvoudigen aard is, en in de veronderstelling, dat het molecuul bevat 1 Cu, vindt men voor het *moleculair-gewicht*:

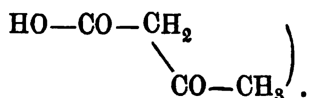
$$M = \frac{(100-13,9) \times 63,3}{13,9} + 63,3 = 391,37 + 63,3 = 454,67,$$

terwijl de formule $C_{16}H_{24}CuO_{11}$ overeenkomt met 454,38.

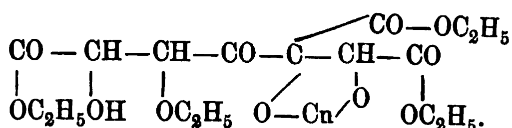
Voorloopige theoretische beschouwingen betreffende de structuurformule der koperverbinding. Aangezien men voor 't oogenblik slechts een geringe hoeveelheid dezer stof tot zijn beschikking heeft, als gevolg der betrekkelijk kleine opbrengst bij de bereiding, vond men het goed, om de structuurformule te behandelen, alvorens de afdoende reacties zijn verricht, die later zullen moeten gedaan worden. Zooals weldra zal blijken, bestaat er reden om aan te nemen (steunende op argumenten, die hieronder volgen), dat de koperverbinding een eenvoudig afgeleide is van het onbekende *tartrylwijnsteenzuur*, namelijk mono*aethyl*-mono*cuprum*-*tartrylwijnsteenzuur aethyl*. Het tartrylwijnsteenzuur is te beschouwen als een afgeleide van *wijnsteenzuur* door verplaatsing van 1 H van een CH door den rest van 1 mol. wijnsteenzuur — OH (te weten: —CO—CH—CH—CO—OH, met OH aan elk CH), bij gevolg is de structuurformule van *tartrylwijnsteenzuur*;



(gelijk b.v. het acetylazijnzuur is te beschouwen als een afgeleide van azijnzuur, de substitueerende rest in dit geval zijnde: CH_3.CO.OH— OH, zoodat men heeft:



De verbinding, waarvan sprake is, zou alzoo kunnen geconstitueerd zijn:



Thans mogen eenige argumenten volgen betreffende deze formule.

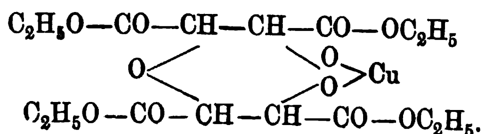
1°. Wat in de eerste plaats betreft de zoogenaamde verhoudingsformule, met 't oog op de analytische gegevens zou men wel geen andere kunnen aangeven; ook stemt het *berekende* mol.-gew. zeer goed met deze formule, beschouwd als te zijn mol. formule.

2°. Het aantal atomen *zuurstof*, te weten O_{11}, kan overeenkomen met een eenvoudig afgeleide (een ester, enz.) van het *tartrylwijnsteenzuur*, verondersteld namelijk, dat de verbinding geen kristalwater bevat, hetgeen in overeenstemming is met de waargenomen feiten.

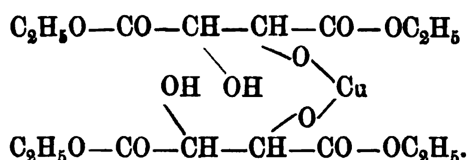
Het aantal atomen *koolstof* is integendeel een ander dan de formule van het tartrylwijnsteenzuur vordert, zijnde namelijk C_{14} (het chinon C_{12}) in plaats van C_{16}, gelijk onze formule verlangt.

3°. Lettende op de reactie met ferridchloride en de wijze van ontstaan, is de kans zeker groot, dat men heeft te doen met een *keton*verbinding. Het besluit is dus, dat de koperverbinding een aethyl-koperverbinding zou kunnen zijn van *tartrylwijnsteenzuur aethyl*.

4°. Opmerking verdient, dat de formule $C_{16}H_{24}CuO_{11}$ ook overeenkomt met die van een verbinding direct af te leiden van wijnsteenzuur, te wezen de volgende:



Maar deze stof zou wel geen kersroode verkleuring geven met ferridchloride. Het ontstaan van een dergelijke verbinding zou ook niet weinig bezwaar hebben om te verklaren. In ieder geval heeft men suprichloride laten inwerken op *mononatrium-wijnsteenzuur aethyl* (zie p. 170), ten einde zooveel mogelijk te steunen op feiten. Bij deze reactie moet ontstaan de verbinding:



5°. De *groene* kleur van ons lichaam in questie, maakt het eenigermate waarschijnlijk, dat het koper zich bevindt in het betrekkelijk zure gedeelte van het molecuul, toch zonder geplaatst te zijn in de carboxyl's (want in dat geval zou moeten aangenomen worden, dat er verzeeping had plaats gehad; en er is gevonden, dat er dan geen gekristalliseerde *onoplosbare* koperverbinding ontstaat); zie de formule p. 173.

6°. De verplaatsing slechts van één rest H van OH door C_2H_5, terwijl een rest OH onaangetast zou blijven, is wellicht op te helderen door het feit, dat het product, bestempeld met den naam van *oplosbaar product*, misschien een hoeveelheid aethylchloride bevat in het molecuul, uit te drukken door $1\frac{1}{2}$ C_2H_5 Cl. Een weinig later zal men op dit onderwerp terugkomen.

7°. Gaat men uit van de samenstelling der gekristalliseerde koperverbinding, b.v. der volgende analyse:

koolstof.	41,8
waterstof	5,5
koper	13,9
zuurstof.	38,8
	100,0

, dan zou de verbinding in vrijen staat dus tot samenstelling hebben (2 H op Cu):

koolstof	41,8
waterstof 5,5 + 0,44 =	5,94
zuurstof.	38,8
	86,54

, of berekend op 100 gew.-d.:

		de formule van monaethyl-tartryl-wijnsteenzuur aethyl verlangt:
koolstof . .	48,3	48,7
waterstof . .	6,8	6,6.

Het lichaam afgeleid van het *oplosbare* en *onoplosbare* product met zoutzuurgas, gaf als gemiddelde der analysen, wat betreft dat van het oplosbare product *):

koolstof.	47,5
waterstof	6,5

, en van het onoplosbare product †):

koolstof.	47,1
waterstof	6,1.

Maar er moet opgemerkt worden, dat met dit lichaam (afgeleid van oplosbaar en onoplosbaar product) de onoplosbare koperverbinding niet kon verkregen worden. Hierbij werd uitgegaan van de veronderstelling, dat de samenstelling van dit lichaam overeenkomt met de formule $C_{16}H_{26}O_{11}$ en bij de alcoholische oplossing gedaan die van natrium-aethylaat (zijnde 4 Na), en als verhouding met cupri-chloride die genomen uitgedrukt door 2 Na en Cu, alhoewel later is gebleken, zie vroeger, dat dan niet het maximum aan opbrengst wordt erlangd, uitgaande van het oplosbare product. En komt evenwel kooldioxyde vrij in gemelde reactie met chloorwaterstofgas, tot nog toe niet waargenomen bij ontleding van het *oplosbare* product met

*) Zie deze Verhandeling pag. 150.

†) l. c. p. 151.

cuprichloride (in alcoholische oplossing, daarna in water), wel daarentegen bij behandeling van het *onoplosbare* product met cuprichloride in alcohol. Ook moet in 't oog worden gehouden, dat onder den invloed van chloorwaterstof in overmaat, het alcoholische aethoxyl C_2H_5O, ten deele zou kunnen overgaan in HO, wellicht tevens het geval eenigermate met $CO.OC_2H_5$, daarbij dan overgaande in CO.OH (het vrijkomen van CO_2 ware dan eenvoudig te verklaren).

Om den invloed te leeren kennen van de al of niet aanwezigheid van den rest C_2H_5, volge hier nogmaals de samenstelling van *tartrylwijnsteenzuur aethyl:*

koolstof.	45,9
waterstof	6,0.

Over het oogenblik van ingevoerd worden van den rest aethyl C_2H_5. Het dus geheeten *onoplosbare* product is, om zoo te zeggen, vrij van chloor, en toch bevat dit lichaam, gedacht in *vrijen* staat, *minder koolstof* en *waterstof* dan zelfs gevorderd wordt voor *tartrylwijnsteenzuur aethyl* (zie hierboven). Van het zoogenoemde *oplosbare* product weet men nog niet, of het chloor daarin bevat is als *aethylchloride* dan wel als *chloornatrium*. De overeenkomst in samenstelling der afgeleiden van deze twee stoffen met *chloorwaterstofgas* zou kunnen doen veronderstellen, dat het chloor in het molecuul van het *oplosbare* product aanwezig is als *aethylchloride*. Maar reeds is opgemerkt, dat door het chloorwaterstofgas wellicht gedeeltelijk de rest C_2H_5 van het alcoholische aethoxyl C_2H_5O wordt geëlimineerd (verondersteld in dit geval, dat het chloor voorhanden is ten deele als *chloornatrium*); en tevens van het carboxaethyl $CO.OC_2H_5$, welke groep per se aanwezig is zoowel in het mon*aethyl*-tartrylwijnsteenzuur aethyl, als in het tartrylwijnsteenzuur aethyl, zonder dat de rest C_2H_5 in het alcoholische gedeelte is ingevoerd. Wat men evenwel tamelijk zeker weet, is, dat die gekristalliseerde (onoplosbare) koperverbinding niet ontstaat zonder *tusschenkomst van water* (zie p. 167). Nu is het mogelijk, dat door het water de rest Na wordt verplaatst door H (in het alcoholisch gedeelte van het molecuul), en dat het NaOH aldus ontstaan, met C_2H_5Cl een

deel substitueert der waterstof van den alcoholischen rest OH door C_2H_5.

Het oplosbare product in alcoholische oplossing tegenover water. Wordt bij een alcoholische oplossing, b.v. van 3 gew.-d. oplosbaar product in 25 gew.-d. alcohol, nu en dan een hoeveelheid water gedaan, en laat men telkens de massa eenigen tijd staan, dan wordt genoegzaam het geheel in een *geleiachtige massa* omgezet. Dit is in overeenstemming met het feit, reeds vermeld, dat het oplosbare product, blootgesteld aan vochtige lucht geleiachtig wordt. Ook geeft dit product, behandeld met water alleen, b.v. van 1,5 gew.-d. met 5 gew.-d. water, ten deele een geleiachtige massa, die evenwel na eenigen tijd wordt opgelost.

Verhouding van barytwater tegenover het oplosbare en onoplosbare product, en de lichamen met zoutzuurgas daaruit verkregen. Deze vier stoffen geven in waterige oplossing met barytwater een amorph neêrslag (zooals dit b.v. het geval is met brandigdruivenzuur).

Wijnsteenzuur aethyl met 4 (C_2H_5.ONa) *op* 1 *mol.*. Deze proef werd herhaald *), om meer zekerheid te hebben betreffende het al of niet gevormd worden van een lichaam met *gesloten keten*, daar een overmaat van natriumaethylaat bevordelijk zou kunnen zijn aan het ontstaan van een chinon (diketon). Er werd uitgegaan van 2 × 0,29 gr. natrium, 1,319 gr. wijnsteenzuur aethyl en 2 × 6 gr. zuiveren alcohol, alles in een klein kolfje, *later gevuld met waterstof, zooals gewoonlijk.* Ook werd de alcohol aanvankelijk verwijderd in vacuo bij gewone temperatuur, en deze langzamerhand verhoogd. Bij iedere verhooging in temperatuur werd ongeveer drie uur verhit. De uitkomst was de volgende:

temperatuur:	gewicht:	opmerkingen:
30°	5,834 gr.	de massa is dikvloeibaar;
40°	3,158 »	de massa is vast en lichtgeel gekleurd;
60°	2,558 »	de kleur is ongeveer dezelfde gebleven;

*) Zie: *Verslagen en Mededeelingen* der Koninkl. Akad. v. Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, 3e Reeks, Deel VIII, p. 175.

temperatuur:	gewicht:	opmerkingen:
100°	2,12 gr.	de gele tint is sterker geworden;
150°	1,725 »	de kleur is geel-roodachtig;
200°	1,709 »	de kleur veranderde niet.

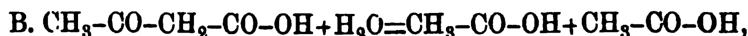
De massa werd behandeld met gewonen abs. alcohol. Er bleef terug van een geel-roodachtig product, dat werd opgelost in water en ontleed met verdund zoutzuur. Er kwam vrij van een lichaam met eigenaardigen reuk, maar geen spoor ontstond van een onoplosbare verbinding (van een chinon). Men kan gerust aannemen, dat het molecuul geheel werd ontleed.

Verbindingen, die waarschijnlijk afgeleid kunnen worden van tartrylwijnsteenzuur. Zooals b.v. acetylazijnzuur kan doen ontstaan:



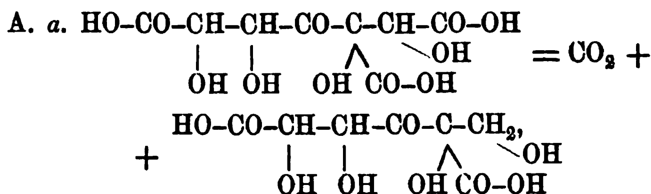
A. $CH_3—CO—CH_2—CO—OH = CO_2 + CH_3—CO—CH_3$,

en

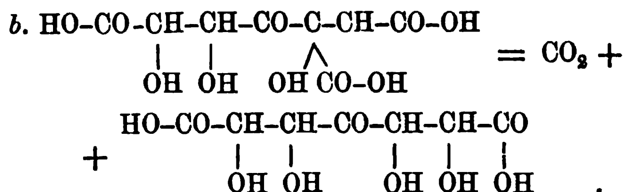


B. $CH_3\text{-}CO\text{-}CH_2\text{-}CO\text{-}OH + H_2O = CH_3\text{-}CO\text{-}OH + CH_3\text{-}CO\text{-}OH$,

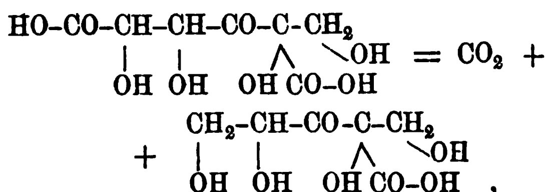
zou tartrylwijnsteenzuur kunnen aanleiding geven tot het doen gevormd worden van:



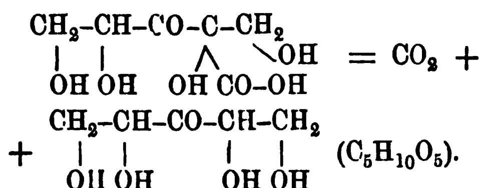
of wel van:



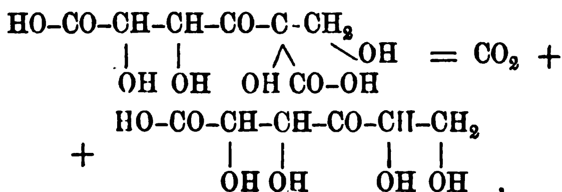
Het lichaam ontstaan b.v. in *reactie a.* zou de volgende verbinding kunnen doen ontstaan:



en dit op zijne beurt de volgende:

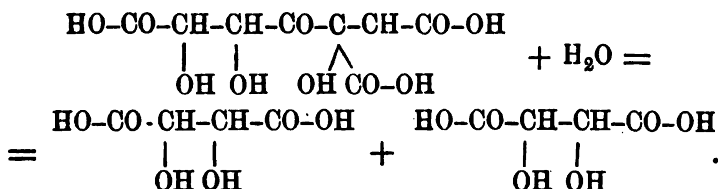


Maar de verbinding in *reactie a.* gevormd, zou tevens aanleiding kunnen geven tot de volgende:



dat wel in een *glucose* zal kunnen omgezet worden.

B. Wijnsteenzuur kan aldus ontstaan:



BESLUIT.

De uitkomsten van onderzoek in deze Verhandeling medegedeeld, leiden in hoofdzaak tot het volgende.

1. Opnieuw werden analysen gedaan zoowel van het zoogenaamde*) *onoplosbare* product als van het *oplosbare* product, beiden afgeleid van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (vrij van alcohol of verbonden met 1 mol. alcohol †)) door middel van aethylchloride. Ook daaruit schijnt te blijken, dat, gelijk reeds in de vorige Verhandeling werd medegedeeld, de samenstelling van deze twee producten eenzelfde is, verondersteld namelijk, dat het gehalte aan chloor als aethylchloride wordt afgetrokken §). Het onoplosbare product is genoegzaam kleurloos, en biedt meer kans aan tot zuiverheid, in zooverre als het met abs. aether kan worden gezuiverd; het oplosbare product, licht geel gekleurd, vermag niet gezuiverd te worden, daar het oplosbaar is in de gewone oplossingsmiddelen, zelfs in aethylchloride.

2. Een meer uitvoerig onderzoek werd ingesteld van de verbinding afgeleid zoowel van het oplosbare als onoplosbare product (in het eerste geval opgelost, in het tweede geval verdeeld in aethylchloride), met *zoutzuurgas* **). Hierbij komt kooldioxyde vrij. De gevormde lichamen, die zich voordoen als lijvige vloeistoffen, schijnen in den grond dezelfde samenstelling te hebben. Zij bevatten geen chloor.

Kooldioxyde geeft geen neêrslag met het oplosbare product opgelost in alcohol ††).

3. Tevens werd een uitgebreider onderzoek gedaan van het *chloornatrium* in gemelde reactie gevormd. Zelfs onder den microscoop valt niets waar te nemen van een kristallijne structuur, en dit zout bij uitnemendheid moet derhalve beschouwd worden, aldus gevormd, van te zijn *amorph*. Na behandeling met gewonen abs. alcohol (na uittrekken met abs. aether), blijft de amorphe toestand onveranderd, alleen heeft de massa het aanzijn meer of min van *krijt* verkre-

---

*) Zie deze Verhandeling, pag. 148.

†) l. c., pag. 159.

§) Zie de voorgaande Verhandeling, pag. 257.

**) Zie deze Verhandeling, pag. 149, 151, 160.

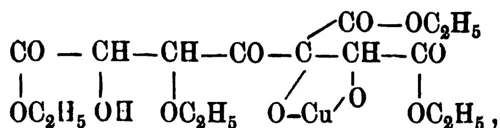
††) l. c., pag. 162.

gen, en bevat thans slechts sporen van koolstof en waterstof *).

Deze methode is, met eenige wijziging, wellicht vatbaar voor meer uitbreiding, in zooverre, als zij een middel zou kunnen aanbieden, om vele zouten, gewoonlijk gekristalliseerd, in *amorphen* staat te bekomen †).

4. Er zijn eenige reacties gegeven betreffende het oplosbare en onoplosbare product, opgelost in water of alcohol (of daarin verdeeld) met verschillende zouten §).

5. Een meer speciaal onderzoek is gedaan met *caprichloride* **). In alcoholische oplossing geeft het oplosbare product *geen* neêrslag met caprichloride opgelost in alcohol. Maar wordt dit mengsel uitgestort in *water* (het doel dezer bewerking is, om de verzeeping, later met water, te ontgaan ††)), dan zet zich een lichaam af, dat kan kristalliseeren in *prismatische naalden* met een schoone *licht groene kleur, oplosbaar* in *alcohol* en abs. *aether, genoegzaam onoplosbaar in water.* Opgelost in alcohol, of in water verdeeld, geeft dit lichaam met *ferridchloride* een *kersroode* verkleuring. De analysen beantwoorden aan de formule $C_{16}H_{24}CuO_{11}$, en dit lichaam zou kunnen zijn, ook naar de synthese, *monaethyl-cuprumtartrylwijnsteenzuur aethyl* §§), b.v.:



maar dit moet nog nader worden nagegaan.

6. Wordt bij de alcoholische oplossing van het oplosbare product nu en dan een weinig water gedaan, om het daarna

*) l. c., pag. 160.

†) l. c., pag. 162.

§) l. c., pag. 163.

**) l. c., pag. 164.

††) l. c., pag. 165, 166, 167.

§§) l. c. pag. 173.

telkens eenigen tijd te laten staan, dan vormt zich ten slotte een *geleiachtige massa* *).

De waterige oplossing van het oplosbare en onoplosbare product, zoo ook van het lichaam daaruit ontstaan met chloorwaterstofgas, geven met *barytwater* †) een *onoplosbare* verbinding.

Wijnsteenzuur aethyl schijnt bij vermenging met 4 (C_2H_5ONa) op 1 mol. onder verwarming in vacuo tot aan en bij 200°, geheel te worden ontleed §).

7. De onderzoekingen tot nog toe verricht, maken het waarschijnlijk, dat het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bij behandeling met aethylchloride geen diketon (chinon) doet onstaan, maar slechts een monoketon, te weten het *tartryl-wijnsteenzuur*. Een voortgezette studie dezer stof zou aanleiding kunnen geven tot de kennis van vele belangrijke verbindingen **).

Men stelt zich voor, om in een volgende Verhandeling op dit onderwerp terug te komen, en het onderzoek voort te zetten met betrekking tot de omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van aethylchloride.

Utrecht, 26 September 1891.

---

*) l. c., pag. 177.

†) l. c., pag. 177.

§) l. c., pag. 177.

**) l. c., pag. 178.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 31 Oct. 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, MICHAËLIS, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, STOKVIS, FRANCHIMONT, LORENTZ, KAMERLINGH ONNES, MAC GILLAVRY, RAUWENHOFF, J. A. C. OUDEMANS, KAPTEYN, MOLL, VAN RIEMSDIJK, HUBRECHT, HOEK, VAN DORP, VAN BEMMELEN, BAKHUIS ROOZEBOOM, KOSTER, PEKELHARING, MULDER, VAN DER WAALS, FORSTER, ZAAIJER, HOFFMANN, PLACE, SCHOUTE, GRINWIS, ENGELMANN, KORTEWEG, HOOGEWERFF, SCHOLS, A. C. OUDEMANS JR., BAEHR, VAN DIESEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris. Voorts de Correspondent SLUITER.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. W. HULKE, Bibliothecaris van de royal medical and chirurgical Society te Londen, 1891; 2°. R. HILDEBRAND te Leipzig, 25 October 1891; 3°. P. DE MADRAZO, Secretaris van de real Academia de la Historia te Madrid, 6 October 1891; 4°. den Secretaris van de Académie royale des Sciences te Lissabon, 26 September 1891; 5°. A. KARPINSKY, Directeur van het Comité géologique te St. Peters-

burg, 24 October 1891; 6°. L. LINDELÖF, Secretaris van de Société des Sciences de Finlande te Helsingfors, 21 September 1891; 7°. W. S. DUN, Bibliothecaris van het Department of Mines te Sydney, 11 September 1891; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden: 1°. het Ministerie van Binnenlansche Zaken te 's Gravenhage, 24 October 1891; 2°. E. PERCEVAL WRIGHT, Secretaris van de royal Irish Academy te Dublin, 1891; 3°. HEYD, Bibliothecaris van de kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, September, 1891; 4°. A. GRIGORIEF, Secretaris van de Société impériale russe de Géographie te St. Petersburg. 1 Juli 1891; 5°. T. C, WENDENHALL, Superintendent van de U. S. coast and geodetic Survey te Washington, 2 October 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn:

1°. eene missive zan Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken (6 Oct. 1891), inhoudende dat, in overeenstemming met het voorstel, door de Afdeeling aan den Minister gedaan, de Heer Dr. J. C. COSTERUS, leeraar aan de H. B. S. te Amsterdam, in het genot zal worden gesteld van de in de laatste twee jaar afgeworpen rente van het Buitenzorgfonds, vermeerderd met eene geldelijke toelage uit de Staatskas, ten einde in 1892 gedurende 6 maanden werkzaam te zijn aan het botanisch Station in 's Lands Plantentuin te Buitenzorg;

2°. een brief van den Hoogleeraar WALDEIJER, met het bericht, dat de, door de Afdeeling aan den Hoogleeraar VIRCHOW, bij gelegenheid der viering van zijn 70sten geboortedag opgedragen gelukwensch, door hem den 13en Oct. jl. aan den jubilaris is ter hand gesteld;

3°. Een brief yan het Aardrijkskundig Genootschap, waarin de hulp der Afdeeling wordt ingeroepen ter bereiking van het doel om vast te stellen, wat er in ons land nog te doen valt op geologisch gebied, met inbegrip van

de vervaardiging eener geologische kaart van Nederland Deze brief zal, met de daarbij behoorende bescheiden, om advies gesteld worden in handen van de geologische Commissie.

— De Heeren Kamerlingh Onnes en Bakhuis Roozeboom brengen verslag uit over de verhandeling van den Hoogleeraar W. H. Julius (Bolometrisch onderzoek van Absorptiespectra) en de Heeren Engelmann en Pekelharing omtrent de verhandeling van den Heer Dr. H. J. Hamburger (Over den invloed der ademhaling op de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes). In beide rapporten, die gunstig luiden, wordt voorgesteld de verhandeling op te nemen in de werken der Akademie. Aldus wordt, zonder discussie, besloten.

— De Heer Grinwis biedt een opstel aan »Over de kinetische energie der centrale beweging", na vooraf eenige inlichtingen gegeven te hebben over de strekking van het onderwerp en de moeilijkheden, bij de studie daarvan ondervonden.

— De Heer Schoute behandelt een probleem uit de Geometria Situs (Meetkunde der ligging) en wel bepaaldelijk de vraag op hoeveel wijzen men 1⁰ een lint en 2⁰ een rechthoekig blad van een bepaald aantal postzegels kan opvouwen, zóó dat in beide gevallen één postzegel alle anderen bedekke. Een opstel over dit onderwerp wordt aangeboden voor de Verslagen en Mededeelingen.

— De Heer Stokvis spreekt over wederkeerige tegengiften en hunne gecombineerde werking. Door eene reeks van proeven aan het kunstmatig gevoede, geïsoleerde, vrij pulseerende kikvorschhart, aan een toestel bevestigd, vroeger door hem in den Donders-feestbundel beschreven, heeft hij zich overtuigd:

dat voor dit orgaan digitaline en muscarine als ware wederkeerige tegengiften mogen gelden, zoodat, onverschillig

in welke volgorde zij met het bloed tot de binnenvlakte van het hart worden toegelaten, de eene zelfstandigheid steeds de werking der andere vermindert en opheft.

Eene door den S. gedemonstreerde curvenreeks toont nader aan, hoe, onder den invloed van digitaline-houdend bloed, het kikvorschhart meer frequente en meer energieke contracties, een langeren duur van de systole, een korteren van de pauze, en bij te lange inwerking stilstand in systole vertoont, terwijl onder den invloed van muscarine de frequentie en intensiteit der hartscontracties afnemen, de diastole langer duurt, de pauzen verlengd worden en het hart eindelijk in diastole stil staat.

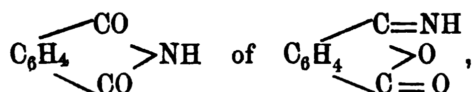
Laat men deze twee wederkeerige tegengiften gelijktijdig in verschillende en in de verschillende proeven varieerende hoeveelheden met het bloed tot het hart toe, dan blijkt, dat bij gelijktijdige aanwending het antagonistisch effect des te sterker uitvalt, naarmate tegenover eene oplossing van bepaalde sterkte van de eene stof, de oplossing der andere binnen zekere grenzen meer verdund wordt. Zoo wordt het nadeelig effect eener muscarine-oplossing van 1 : 25000 bij gelijktijdige aanwending eener digitaline-oplossing van 1 : 5555 duidelijk versterkt, maar bij gelijktijdige aanwending eener digitaline-oplossing van 1 : 33333 bijna geheel en al opgeheven, zooals door den S. met behulp eener graphische voorstelling nader wordt gedemonstreerd. Men kan op die wijze het verlammend gif met zoo kleine hoeveelheden van het prikkelend verbinden, dat in het eindeffect geene nadeelige werking meer bespeurd wordt, en het orgaan den invloed van een nieuwe stof met eigenaardige werkingen schijnt ondervonden te hebben.

Eindelijk doet de S. uitkomen, hoe de gelijktijdige aanwending van wederkeerige tegengiften voordeelig werkt bij het herstel, na het staken van het toevloeien van het vergiftigd bloed. Terwijl het alleen door muscarine vergiftigd hart, na het staken der vergiftiging, een zeer geruimen tijd noodig heeft om tot den normalen toestand terug te keeren, komt het, na de aanwending van bepaalde hoeveelheden muscarine en digitaline in zijne functies bijna even belang-

rijk gestoorde hart, na het staken der vergiftiging en het doorvloeien van normaal bloed, bijna onmiddellijk weder in het bezit zijner normale energie. Ook het beloop van het herstel in deze beide gevallen wordt graphisch toegelicht.

Een paar ophelderingen, door den Secretaris en den Heer ENGELMANN gevraagd, worden door den spreker gegeven.

De Heer HOOGEWERFF spreekt, ook uit naam van het lid VAN DORP, over een onderzoek, ondernomen met de bedoeling, eene bijdrage te leveren tot de oplossing der vraag: of aan het gewone phtalimide de symmetrische of de onsymmetrische formule moet worden toegekend:



en waarbij in de eerste plaats de inwerking van ammoniak op phtalylchloride werd onderzocht.

Hij herinnert aan hetgeen te dien opzichte reeds door KUHARA *), door GRAEBE en PICTET †) en door AUGER §) is medegedeeld. Van de resultaten, door hem en het lid VAN DORP verkregen, geeft spreker het volgende overzicht.

Wordt, terwijl voor afkoeling wordt zorg gedragen, phtalylchloride in ammonia liquida gedruppeld, zoo kan met zoutzuur uit de heldere oplossing in ruime hoeveelheid (ongeveer 40 pCt. van het gewicht van het gebruikte phtalylchloride) een lichaam worden afgescheiden, dat, bij gewone temperatuur naast zwavelzuur gedroogd en gezuiverd door oplossing in aceton en praecipitatie met petroleumaether, in den vorm van witte naaldjes wordt verkregen, die tusschen 180°—190° smelten, om bij voortgezette verhitting in gewoon phtalimide over te gaan, dus weder vast worden en dan bij 230° smelten. De stof, die de procentische samenstelling van het phtalimide bezit, lost in kaliloog op,

*) *American. Chem. Journ.* 3, p. 26.

†) *Ber. d. Deutsch. Chem. Gesell.* 17, p. 1173*a*.

§) *Bull. Soc. Chim.* 49, p. 35 en *Ann. de Chim. et Phys.*, 1891 Mars p. 289.

doch wordt uit die oplossing door koolzuurgas niet neergeslagen, wat bij het gewone phtalimide wel plaats heeft. Zij ontleedt de carbonaten en acetaten der alkaliën en alkalische aarden, in water oplosbare verbindingen vormende, waaruit zij door zoutzuur onveranderd wordt afgescheiden. Van die eigenschappen kan ter zuivering van het lichaam worden gebruik gemaakt. Het kalium-, baryum-, zilver- en ammoniumzout is geanalyseerd. Wordt het lichaam in vochtigen toestand bij hoogere temperatuur gedroogd, zoo zet het zich in phtalimide om; door koking met water ontstaat phtaalzuur.

Het sterk zure karakter van het lichaam deed reeds het vermoeden ontstaan, dat men het orthocyanbenzoëzuur in handen had. Dit werd bewezen door de bereiding der methyl- en aethylverbinding, waarin de methoxyl- resp. aethoxylgroep werd aangetoond, terwijl de aethylverbinding identisch bleek te zijn met den aethylester van het orthocyanbenzoëzuur door MUELLER *) volgens SANDMEYER bereid, ook in haar gedrag tegenover hydroxylamine. Bovendien wordt door de inwerking van geconcentreerd zwavelzuur phtalaminzuur uit het lichaam gevormd. Spreker wijst er op, hoe hiermede eene doelmatige bereidingswijze voor het *orthocyanbenzoëzuur* $C_6H_4{}^{CN}_{COOH}$, dat tot dusver in vrijen toestand onbekend was, gevonden is. Neemt men aan, dat bij de inwerking van ammoniak op phtalylchloride in de eerste plaats het onsymmetrische phtalimide $C_6H_4\begin{matrix}C{=}NH\\ >O\\ C{=}O\end{matrix}$ gevormd wordt en dat dit onbestendig is (zie blz. 5), dan is het optreden van $C_6H_4{}^{CN}_{COOH}$ gemakkelijk verklaarbaar.

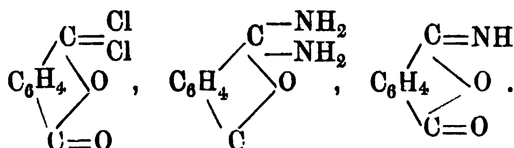
ALLENDORF †) heeft onlangs in LIEBERMANN's laboratorium het benzaldoximcarbonzuuranhydride bereid $C_6H_4\begin{matrix}C{=}O\\ |\quad -O\\ \quad |\\ |{=}N\\ C{-}H\end{matrix}$ en

*) *Ber. d. Deutsch. Chem. Gesell.* 19, p. 1498.
†) *Ber. p. Deutsch. Chem. Gesell.* 24, Juli heft.

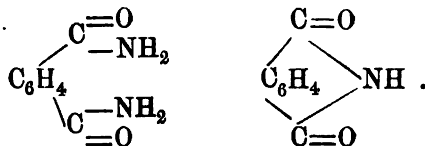
er op gewezen, dat bij verhitting dier verbinding eene vrijwillige omzetting in het daarmede isomerische gewone phtalimide plaats vindt, waarbij als overgangslichaam eene stof optreedt, waarvan hij de mogelijkheid aanneemt, dat zij orthocyanbenzoëzuur is en die hij identisch met het product vindt, dat hij ter vergelijking uit phtalylchloride en ammonia liquida bereid heeft.

Ook ter beantwoording der vraag: welke formule aan het gewone phtalimide moet toegekend worden, wordt door het voorafgaande eene bijdrage geleverd, wanneer men aanneemt, dat het bekende phtalylchloride $C_6H_4C_2O_2Cl_2$ is en uit *één* lichaam bestaat, geen mengsel is, iets wat nog niet geheel zeker schijnt.

Bij het ontstaan van orthocyanbenzoëzuur uit dat chloride door de inwerking van ammonia liquida, kan niet worden aangenomen, dat als tusschenproduct gewoon phtalimide of diamide wordt gevormd, omdat die lichamen door ammoniak niet in orthocyanbenzoëzuur worden omgezet. Het gewone imide toch vormt met ammonia liquida het diamide, en het diamide is tegen de verdere inwerking van ammoniak bestand. Toch is het zeer waarschijnlijk, dat bij de inwerking van ammonia liquida op het chloride een diamide of een imide ontstaat. Dit amide en imide moeten dan *isomerisch*, niet *identisch* zijn met het *gewone* phtalamide en imide. Wordt nu het phtalylchloride als onsymmetrisch aangenomen, hetgeen meestal geschiedt, dan moeten eerstgenoemde verbindingen zelve onsymmetrisch zijn; dus

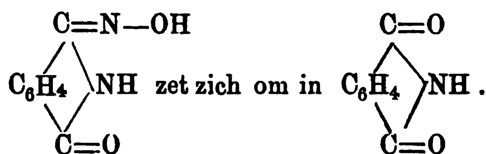


Het gewone phtaldiamide en imide zijn dan de symmetrische verbindingen



Tot steun van deze opvatting diene nog het feit, dat bij inwerking van methylalkoholische ammoniak op den aethylester van het phtaalzuur (uit dat zuur, aethylalkohol en zoutzuurgas bereid) een diamide verkregen werd, dat, bij nauwkeurig onderzoek naar zijne eigenschappen en omzettingen, identisch bleek te zijn met het gewone phtaldiamide, waarin het bekende phtalimide door inwerking van ammonia liquida dadelijk overgaat. Neemt men phtaalzuur als symmetrisch aan, dan is voor den ester en het daaruit gevormde diamide geene andere opvatting te verdedigen en dus ook langs dezen weg het symmetrisch zijn van het gewone diamide aangetoond.

Ook de overgang van het phtalimidoxim door Fe_2Cl_6 in gewoon phtalimide, door MUELLER *) waargenomen, wijst op de symmetrische constitutie van dat phtalimide:



Deze opvatting aangaande de structuur van het phtaldiamide en het imide is echter in strijd met die van WISLICENUS, die waarnemingen deed, op grond waarvan in den laatsten tijd aan die verbindingen dikwerf de onsymmetrische formule wordt toegekend †).

Spreker deelt mede, dat een onderzoek onderhanden is om zoo mogelijk die tegenstrijdigheden op te lossen en brengt ook uit naam van het lid VAN DORP dank aan de Heeren VAN BREUKELEVEEN en DOCTERS VAN LEEUWEN voor de medewerking, die zij bij dezen arbeid verleenden. Hij geeft over enkele punten een nadere toelichting aan den Heer FRANCHIMONT.

— De Heer RAUWENHOFF biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling van den Heer C. VAN

---

*) l. c.

†) LIEBIG's *Annalen* 242, p. 31.

WISSELINGH, apotheker te Steenwijk: »Over de kurklamel en het suberine". Zij wordt, om advies, in handen gesteld van de Heeren RAUWENHOFF en MOLL.

— De Heer VAN BEMMELEN biedt, uit naam der Geologische Commissie, voor de Verslagen en Mededeelingen aan eene nieuwe geologische bijdrage van Dr. J. LORIÉ, getiteld: »Over de hooge venen in Noord-Brabant en Limburg.

— Voor de Bibliotheek der Akademie worden aangeboden, door den Heer RAUWENHOFF: de dissertatie van den Heer J. C. KONIGSBERGER (Bijdrage tot de kennis der zetmeelvorming); door den Heer STOKVIS een exemplaar van eene brochure, waarin zijne proeven over het wederkeerig antagonisme der vergiften uitvoerig beschreven zijn, en door de Redactie van het Recueil des Traveaux chimiques des Pays-Bas een nieuw nummer van dit tijdschrift.

— Daar er verder niets meer te behandelen is, wordt de vergadering gesloten.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELING:

BOLOMETRISCH ONDERZOEK VAN ABSORPTIESPECTRA

DOOR

Dr. W. H. JULIUS.

(Uitgebracht in de vergadering van 26 Sept. 1891).



Over het in deze verhandeling uitvoerig beschreven onderzoek werd reeds in November van het vorige jaar eene korte mededeeling door den Heer VAN DER WAALS aangeboden.

Het is eene voortzetting van den belangrijken arbeid, waarvan de uitkomsten door Dr. JULIUS zijn neergelegd in zijne dissertatie, en het met goud bekroonde antwoord op eene prijsvraag van het Verein zur Beförderung des Gewerbfleisses in Deutschland.

Dr. JULIUS was de eerste, die emissiespectra van gloeiende gassen in het uiterste infrarood onderzocht. Hij vond bij verschillende vlammen samengedrongen stralingsmaxima, die veel beloofden voor de theorie der warmtetrillingen. Hij vond verder in het absorptiespectrum van water een donkeren band, die met het maximum der uitstraling van gloeienden waterdamp overeenkwam. En hij vestigde er toen reeds de aandacht op, dat het onderzoek der absorptiespectra van verschillende stoffen, liefst ook in verschillende aggregatie-toestanden, van groot belang zou zijn. Blijkens de

mededeeling van November 1890, heeft Dr. JULIUS zelf zijne krachten aan dit uitlokkend gebied van onderzoek gewijd en talrijke uitkomsten verkregen. De hooggespannen verwachting, die aldus bij uwe Commissie omtrent de thans aangeboden verhandeling werd opgewekt, vond zij bij de lezing ten volle bevestigd. Omgekeerd kan zij, wat de korte omschrijving van den zakelijken inhoud der verhandeling betreft, volstaan met te verwijzen naar meergenoemde mededeeling.

In enkele punten raakt het onderzoek van Dr. JULIUS den bijna gelijktijdigen arbeid van K. ÅNGSTRÖM. Gelijk ÅNGSTRÖM vroeger bij het navorschen der absorptiespectra van koolzuur en kooloxyde verrast werd door de proeven van JULIUS over de emissiespectra, zoo werd nu JULIUS verrast door ÅNGSTRÖMS absorptiespectra van enkele dampen en vloeistoffen, en van diamant. De wedstrijd tusschen deze beide voortreffelijke onderzoekers draagt niet weinig bij tot het verhoogen van de waarde, die hunne uitkomsten elk op zichzelf hebben, en die wedstrijd zal zeker ook bevorderlijk zijn aan het oplossen van die vraagstukken, waarbij, zooals in het geval van het diamant, blijkens het verschil van beider uitkomsten, de buitengewoon groote moeilijkheden der metingen nog niet, althans door beide waarnemers nog niet, zijn overwonnen. Zonder op de uitkomsten van verder onderzoek in dezen vooruit te loopen kunnen wij hier met genoegen vermelden, dat Dr. JULIUS voor zijne bepaling van de absorptie van diamant, door de welwillendheid van den Heer BEGEER, juwelier te Utrecht, een bijzonder grooten portretsteen kon gebruiken.

Dr. JULIUS acht het door hem bijeengebrachte omvangrijke materiaal nog niet voldoende om uit de infraroode spectra nu reeds algemeene gevolgtrekkingen te maken, en wij deelen deze meening. Doch de beschouwing van die spectra doet ons anderzijds met Dr. JULIUS vertrouwen, dat het »geen ijdel streven" is om door de studie der absorptie van het uiterste infrarood »in den schijnbaren chaos der warmtetrillingen orde te zoeken".

Moge Dr. Julius in dit streven blijven volharden, en moge aan de Akademie het voorrecht te beurt vallen, ook verdere uitkomsten daarvan openbaar te maken, gelijk deze verhandeling, waarvan uwe Commissie de opneming in de werken der Akademie aanbeveelt.

H. KAMERLINGH ONNES.

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELING:

OVER DEN INVLOED DER ADEMHALING

OP DE

PERMEABILITEIT DER BLOEDLICHAAMPJES

DOOR

Dr. H J. HAMBURGER.

De verhandeling van Dr. H. J. Hamburger te Utrecht, waarover de ondergeteekenden de eer hebben rapport uit te brengen, sluit zich aan bij onderzoekingen, vroeger door den schrijver aan de Koninklijke Akademie aangeboden en in de Verslagen en Mededeelingen gepubliceerd.

In deze nieuwe bijdrage wordt, volgens dezelfde methoden van vroeger, (inwerking van isotonische en anisotonische oplossingen op bloed, in verband met chemische analyse van serum en lichaampjes), de invloed nagegaan, dien veranderingen in het gehalte van gassen, bepaaldelijk de physiologisch belangrijkste, CO_2 en O, op de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes uitoefenen.

Uitgangspunt van het onderzoek was de waarneming van den Heer Hamburger, dat de lichaampjes van veneus bloed nog aan sterker geconcenteerde Na Cl-oplossingen haemaglobine afstaan dan die van arterieel bloed van 't zelfde dier. De Schrijver toont aan, dat de oorzaak hiervan niet gelegen is in een verschil van osmotische spanning van aderlijk en slagaderlijk bloed, maar gezocht moet worden in eene wijziging van de permeabiliteit der bloedlichaampjes voor roode kleurstof.

In veel hoogere mate kon een soortgelijke wijziging worden voortgebracht door verzadigen van gedefibrineerd bloed met CO_2. Hierbij bleek, dat ook de permeabiliteit voor andere stoffen gewijzigd was. Er heeft een wisseling plaats, in isotonische verhouding, tusschen bestanddeelen van serum en lichaampjes: de laatsten nemen uit het eerste chloriden op en staan andere, voornamelijk eiwitachtige, stoffen daaraan af. Bij het doorvoeren van O, maar ook van N of H, door het met CO_2 beladen bloed, keeren de verschijnselen om. Steeds blijven daarbij de roode bloedlichaampjes aan de wet der isotonische coëfficiënten gehoorzamen.

De proeven leiden tot het gewichtig resultaat, dat de gaswisseling van het bloed in weefsels en longen, door wijziging van de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes oorzaak wordt van een wisseling, ook van vaste bestanddeelen, tusschen plasma en lichaampjes, en leeren zoodoende een nieuwen factor kennen, die op de geheele stofwisseling kwalitatief en kwantitatief moet influenceeren.

Gaarne adviseeren de ondergeteekenden tot het opnemen van de verhandeling in de werken der Koninklijke Akademie.

Utrecht, 28 October 1891.

TH. W. ENGELMANN.
C. A. PEKELHARING.

OVER DEN INVLOED DER ADEMHALING

OP DE

PERMEABILITEIT DER BLOEDLICHAAMPJES

DOOR

Dr. H. J. HAMBURGER.

Vroeger toonden wij aan, * dat wanneer men gedefibrineerd bloed met zoutoplossingen van verschillende concentratiën vermengt, van elk zout een concentratie wordt gevonden, waaraan de bloedlichaampjes een weinig kleurstof afgeven. In zwakkere soluties verliezen de bloedlichaampjes meer kleurstof. Men overtuigt zich hiervan door de bloedlichaampjes te laten bezinken op den bodem van de reageerbuis, waarin zich het mengsel bevindt, en de bovenstaande vloeistof van de verschillende buisjes met elkander te vergelijken.

Het interesseerde ons te weten, of arterieel en veneus bloed zich in dit opzicht gelijk verhielden, m. a. w. of de bloedlichaampjes van het veneuse bloed in dezelfde zoutsolutie kleurstof begonnen af te geven als de bloedlichaampjes van het arterieele.

2 M^3 van het gedefibrineerde arterieele paardebloed — ook bij alle volgende proeven werd van deze bloedsoort gebruik gemaakt — werden vermengd met 20 M^3 eener Na Cl oplossing van 0.65, 0.64, 0.63, 0.62, 0.61 en 0.60 $^0/_0$, en wel in een reageerbuisje van gelijke wijdte. Dezelfde reeks van zoutoplossingen werd ingezet met gedefibrineerd veneus

* *Archiv. f. Anat. u. Physiol. Phisiol.* Abt. 1886 s. 476,

bloed. Het defibrineeren geschiedde natuurlijk zoodanig, dat het veneuse bloed niet geoxydeerd werd, en de zoutoplossingen waren vooraf verhit tot uitdrijving van de zuurstof. Het spreekt van zelf, dat wij zorg droegen, door de verhitting geen verhooging van concentratie te veroorzaken.

Na eenigen tijd waren in beide reeksen de bloedlichaampjes bezonken. De arterieele bloedlichaampjes hadden geen kleurstof afgegeven aan de Na Cl oplossingen van 0.65 %, 0.64 %, 0.63 % en 0.62 %, wel een weinig aan de Na Cl oplossing van **0 61** % en meer aan die van 0.60 %. De veneuse bloedlichaampjes hadden reeds een weinig kleurstof afgegeven aan de Na Cl-oplossing van **0.62** %, meer aan die van 0.61 en nog meer aan die van 0.60 %.

Waaraan moest het worden toegeschreven, dat de veneuse bloedlichaampjes kleurstof afgaven aan een Na Cl-oplossing van 0.62 %, een solutie, waarin de arterieele geen kleurstof loslieten?

Wij konden ons twee verklaringen denken:

1° door het hoogere gehalte aan CO_2 bezat het veneuse bloed een hoogere osmotische spanning dan het arterieele;

2° het CO_2 had invloed op de permeabileit der bloedlichaampjes voor kleurstof.

a. *Vergelijking van de osmotische spanning van veneus en arterieel bloed.*

Het scheen niet moeilijk na te gaan of de eerste onderstelling juist was; immers. wij hadden slechts de osmotische spanning van het serum van het arterieele en van dat van het veneuse bloed te bepalen. Bezat het serum van beide bloedsoorten een verschillende osmotische spanning, dan moest dit ook in denzelfden zin het geval zijn met de bloedlichaampjes.

De betrekkelijk geringe waarde der verschillen, welke de arterieele en veneuse bloedlichaampjes ten opzichte van de Na Clo-plossingen vertoonden, deden echter vermoeden, dat het *serum* van beide bloedsoorten ook geringe verschillen

zou aanwijzen, voor het geval n.l. dat er verschillen bestonden. En het lag voor de hand, dat onze methode voor de bepaling der osmotische spanning *) deze wel voor den dag zou doen treden.

Daarom trachtten wij het veneuse bloed meer veneus te maken, door gedurende een uur CO_2 door te voeren. Bij herhaling van de eerstgenoemde proeven bleek dan ook, dat het veneus gemaakte bloed reeds kleurstof begon te verliezen in een NaCl-oplossing van **0.89** %, niet in een NaCl-solutie van 0.90 %, terwijl, zooals we boven zagen, voor het gewone arterieele bloed de grenzen waren, Na Cl-oplossingen van 0.61 % en 0.62 %. Groote verschillen dus. Het liet zich verwachten, dat, indien de osmotische spanning van het serum van veneus en van arterieel bloed inderdaad verschilde, deze verschillen thans wèl sprekend voor den dag zouden komen.

500 cM^3 gedefibrineerd paardebloed werden in twee gelijke deelen verdeeld. Door de eene helft werd weer een uur CO_2 gevoerd en de andere helft werd met lucht geschud, opdat het goed arterieel zou worden. Beide helften werden aan de werking der centrifuge onderworpen, het serum werd van de bloedlichaampjes verwijderd en nu werd van het serum van het arterieele en van het veneuse bloed de osmotische spanning bepaald door middel van bloedlichaampjes.

10 cM^3 serum werden vermengd met 8, 7.75, 7.50, 7.25, 7, 6.75, 6.50, 6.25 en 6 cM^3 water en bij de mengsels een paar droppels van het oorspronkelijke arterieele gedefibrineerde bloed gevoegd. Nadat de bloedlichaampjes waren bezonken, gaf het mengsel van 10 cM^3 van het serum van het *arterieele* bloed en 7.25 cM^3 water, uittreden van een weinig bloedkleurstof te zien; in het mengsel van 10 cM^3 van het serum en 7 cM^3 water echter was geen spoor kleurstof uitgetreden.

Van het veneus gemaakte bloed gaf het serum, nadat het na doorvoeren van lucht van de overmaat van CO_2 was bevrijd, volkomen hetzelfde resultaat.

*) *Archiv. f. Anat. u. Physiol. Physiol.* Abth. 1887 S. 31.

Het serum was dus tengevolge van het doorvoeren van CO_2 niet of niet merkbaar in osmotische spanning gewijzigd, daar men mag aannemen, dat de bloedlichaampjes in osmotisch evenwicht verkeeren met de vloeistof, waarin ze zich bevinden, — dit evenwicht is, blijkens onze vroegere onderzoekingen, bij verandering van de wateraantrekkende kracht der omgeving spoedig bereikt — mochten we besluiten, dat ook de osmotische spanning der bloedlichaampjes tengevolge van het doorvoeren van het CO_2 niet of niet merkbaar was veranderd *). En toch vertoonde het veneus gemaakte bloed uittreden van kleurstof eerst bij een NaCl-oplossing van 0.89 %, terwijl de arterieele bloedlichaamjes reeds kleurstof verloren in een NaCl-oplossing van 0.61 %. Nu de eerste verklaring niet opging, werden we bij exclusie genoodzaakt, de tweede aan te nemen, namelijk deze, dat de bloedlichaampjes bij doorvoering van CO_2 meer permeabel waren geworden. Mocht dit inderdaad het geval zijn — zoo redeneerden we — dan was het ook waarschijnlijk, dat de bloedlichaampjes eveneens voor andere stoffen een veranderde permeabiliteit hadden verkregen.

Dit was gemakkelijk te onderzoeken.

b. *De permeabiliteit der bloedlichaampjes van het veneuze bloed, vergeleken met die van het arterieele.*

In het serum van het gedefibrineerde arterieele bloed en in dat van het veneus gemaakte werd de hoeveelheid chloriden bepaald door het eiwit neer te slaan, bij de eiwitvrije vloeistof HNO_3 te voegen, benevens $AgNO_3$ in overmaat en vervolgens het overgebleven $AgNO_3$ met K C N S en ferrinitraat te titreeren. Het resultaat was niet twijfelachtig; terwijl van het serum van het arterieele gedefibrineerde bloed het chloorgehalte van 100 M^3 overeen kwam met 99,3 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$, beantwoordde het

*) Een geringe stijging in osmotische spanning moet het serum wel ondergaan hebben wegens doorvoeren van CO_2, maar deze verhooging was toch zeer onbeduidend.

chloorgehalte van 100 cM^3 serum van het veneuse bloed aan 90.7 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$. *Tengevolge van het doorvoeren van CO_2 is dus ruim 8,6 % der chloriden van het serum in de bloedlichaampjes overgegaan.*

Hoe was het met de andere bestanddeelen van het serum? Om hiervan een denkbeeld te verkrijgen, dampten we 50 cM^3 van het oorspronkelijke en van het met CO_2 behandelde bloed tot droog toe in bij 105°—110°. Het residu van de eerstbedoelde 50 cM^3 serum bedroeg 4,157 en van het tweede 4.532 gram. *Hieruit volgt dat het serum ten koste van de bloedlichaampjes* $\frac{4.532 - 4.157}{4.157} \times 100 = 9\,\%$ *in vaste bestanddeelen is toegenomen.*

Het serum had dus chloriden afgegeven, maar andere vaste stoffen opgenomen. Grootendeels moesten dit wel eiwitstoffen zijn. Dit bleek inderdaad, toen we het eiwit in het serum van beide bloedsoorten bepaald hadden. Deze bepaling geschiedde door 50 cM^3 serum, vermengd met 400 cM^3 water, in een kokend waterbad te verhitten, enkele droppels verdund azijnzuur toe te voegen, op de vlam te koken en op een gedroogd gewogen filtrum het eiwit te verzamelen. Het bleek nu, dat in 50 cM^3 serum van het oorspronkelijke bloed zich bevonden 3,862 gram eiwit en dat 50 cM^3 serum na doorvoeren van CO_2 bevatten 4.201 gram eiwit, dat dus 0.339 gram eiwit de bloedlichaampjes hadden verlaten en in het serum waren overgegaan, d. i. in het geheel $\frac{0.339}{4,532 - 4,157} \times 100 = 90,4\,\%$ van hetgeen in het geheel aan vaste stoffen in het serum was gediffundeerd.

Uit deze proeven volgt, dat de bloedlichaampjes door de inwerking van CO_2 van permeabiliteit zijn veranderd, doch, naar hetgeen reeds was gebleken, met behoud van hun oorspronkelijke osmotische spanning. Het laatste is in merkwaardige overeenstemming met hetgeen wij vroeger vonden *) bij inwerking van zouten op bloedlichaampjes:

*) *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch.* 3e Reeks, Deel VII, pag. 15.

wij toonden toen aan, dat na vermenging van gedefibrineerd bloed met isotonische, hyperisotonische en hypisotonische zout- en suikeroplossingen en met serum, dat vooraf met water verdund is, een uitwisseling tusschen de bestanddeelen plaats grijpt van bloedlichaampjes en omgeving, en wel in zoodanige verhouding, dat de wateraantrekkende kracht (osmotische spanning) van geen van beiden hierdoor verandering ondergaat, m. a. w. in isotonische verhouding.

Volkomen gelijk verhouden zich echter de zouten en het CO_2 ten opzichte van bloedlichaampjes *niet*. Na inwerking van zoutoplossingen toch, veranderden de bloedlichaampjes *niet* van permeabiliteit, hetgeen blijkens bovenstaande proeven wel het geval was na inwerking van CO_2.

c. *Was die verandering van permeabiliteit, door het CO_2 teweeggebracht, blijvend?*

Om deze vraag te beantwoorden, werden 300 M^3 gedefibrineerd bloed eenige oogenblikken met lucht geschud en vervolgens in twee deelen verdeeld, in één deel van 100 cM^3 en een ander van 200 cM^3. Door de laatste hoeveelheid werd gedurende een half uur zuiver CO_2 gevoerd, vervolgens werd dit volume in tweeën verdeeld en daarna lieten we door één van beide helften gedurende een uur lucht strijken.

Voor de drie aldus verkregen bloedsoorten werd nu de Na Cl-oplossing gezocht, waarin de kleurstof begon uit te treden.

Het resultaat was sprekend.

a. Het bloed, dat niet met CO_2 was behandeld, begon een weinig kleurstof te verliezen in een NaCl-oplossing van 0.56 %, doch gaf geen spoor af aan een NaCl-oplossing van 0.57 %

b. Het bloed, dat met CO_2 was behandeld, begon een weinig kleurstof te verliezen in een NaCl-oplossing van 0.87 %, doch gaf geen spoor af aan een NaCl-oplossing van 0.88 %.

c. Het bloed, dat met CO_2 was behandeld en daarna met lucht, begon een weinig kleurstof te verliezen in een

NaCl-oplossing van 0.56 %, doch gaf geen spoor af aan een NaCl-oplossing van 0.57 %.

Uit deze proeven bleek duidelijk, dat het CO_2 geen blijvenden invloed op de bloedlichaampjes had uitgeoefend.

Dit bleek ook nog uit de quantitatieve bepalingen van de vaste bestanddeelen en van de chloriden in het serum van bloed a, b en c.

Het volgende tabelletje geeft van deze proeven een overzicht. Hierbij is tevens het specifiek gewicht opgenomen.

TABEL I.

	a	*b*	*c*
	Bloed, dat een weinig met lucht was geschud.	Bloed, bedoeld onder *a*, ½ uur aan de inwerking van CO_2 blootgesteld.	Bloed *b*, waardoor gedurende twee uur lucht is gevoerd.
Specifiek gewicht van het serum .	1026.2	1030.3	1026
Gram vaste bestanddeelen in 50 cM^3 serum..	4.157	4.532	4.122
cM^3 $^1/_{10}$ normaal Ag NO_3 overeenkomende met het chloor van 100 cM^3 serum.....	99.4	90.7	102.42

Uit deze tabel blijkt:

1°. dat door inwerking van CO_2 op gedefibrineerd bloed het specifiek gewicht van het serum stijgt, om na uittreding van het CO_2 weer af te nemen en tot zijn oorspronkelijke waarde terug te keeren, ja zelfs om nog even er onder te dalen;

2°. dat door inwerking van CO_2 op gedefibrineerd bloed het gehalte van het serum aan vaste bestanddeelen toeneemt, om na uittreding van het CO_2 weer tot de oorspronkelijke waarde terug te keeren, ja zelfs nog een weinig onder die waarde te dalen;

3°. dat door inwerking van CO_2 op gedefibrineerd bloed het chloride-gehalte van het serum aanzienlijk daalt, om weer na uittreding van het CO_2 door lucht, tot de oor-

spronkelijke waarde terug te keeren, ja zelfs die waarde een weinig te overtreffen.

De verandering van de permeabiliteit der bloedlichaampjes bleek dus niet blijvend te zijn. Toch trok het de aandacht, dat het specifiek gewicht en de hoeveelheid vaste bestanddeelen van het serum na de energische uitdrijving van het CO_2 zelfs tot *onder* de oorspronkelijke waarde was gedaald, en dat het chloride-gehalte zelfs tot boven de oorspronkelijke waarde gestegen was.

De verklaring daarvan lag voor de hand.

Het oorspronkelijke bloed was wel even met lucht geschud, maar bevatte toch nog CO_2. Dat dit de oorzaak was, bewezen de volgende experimenten.

Door 1500 cM^3 bloed werd gedurende een uur een flinke luchtstroom gevoerd; 300 cM^3 van dit O-houdende bloed werd gecentrifugeerd, 600 cM^3 werd gedurende een uur aan de inwerking van CO_2 onderworpen en van deze aldus verkregen 600 cM^3 bloed, 300 cM^3 gecentrifugeerd en 300 gedurende twee uur weer met een luchtstroom behandeld.

De volgende tabel geeft een overzicht van de thans verkregen resultaten.

TABEL II.

	a	*b*	*c*
	Serum, dat energisch met lucht was behandeld.	Bloed, bedoeld onder *a*, nadat het een uur aan de inwerking van CO_2 was blootgesteld.	Bloed, verkregen onder *b*, en (na inwerking van CO_2) weer gedurende twee uur met lucht behandeld.
Specifiek gewicht van het serum .	1029	1033.1	1029
Vaste bestanddeelen in 50 cM^3 serum.........	4.844	5.243	4.849
cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$ overeenkomende met het chloor van 100 cM^3 serum.....	94.6	87.2	94

Tabel II bevestigt de stelling, dat de verandering van de permeabiliteit door CO_2 niet blijvend is, en toont duidelijk aan, dat onze hypothese omtrent den invloed van het in de bloedlichaampjes aanwezige CO_2 (wij bedoelen van het bloed *a* in tabel I) juist was.

d. *Invloed van zuurstof, waterstof en stikstof op de permeabiliteit.*

Thans wenschten we te onderzoeken of de zuurstof ook als zoodanig invloed op de permeabiliteit had, m. a. w. of de zuurstof soms een anderen invloed op de permeabiliteit uitoefende dan die van een gewoon indifferent gas, dat eenvoudig CO_2 kan uitdrijven. Daarom voerden we door 300 cM^3 van de in de vorige proevenreeks gebruikte 1500 cM^3 krachtig geoxydeerd bloed, gedurende twee uur een stroom zuivere waterstof, en bepaalden weer het specifiek gewicht, de vaste bestanddeelen, benevens het chloorgehalte van het door centrifugeeren verkregen serum. Dezelfde proef deden we ook met stikstof.

Tabel III geeft een overzicht van de verkregen resultaten.

TABEL III.

	a	*b*	*c*
	Bloed, dat energisch met O was behandeld.	Bloed *a* na behandeling met waterstof.	Bloed *a*, na behandeling met stikstof.
Specifiek gewicht van het serum .	1029	1029	1029
Vaste bestanddeelen in 50 cM^3 serum...	4.844	4.862	4.831
cM^3 $^1/_{10}$ normaal $Ag\,NO_3$ overeenkomende met het chloor van 100 cM^3 serum......	94.6	94.3	95.1

Uit deze tabel mag men opmaken, dat de indifferente

gassen O, H en N, geen invloed op de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes hebben uitgeoefend. Toch zijn stikstof en waterstof evenals zuurstof in staat, de door CO_2 gewijzigde permeabiliteit der roode bloedlichaampjes tot de vroegere waarde terug te brengen. De tijd, gedurende welken deze gassen moeten doorgevoerd worden om de tijdelijke verandering der permeabiliteit *geheel* op te heffen, is echter tamelijk lang. Wanneer men een uur CO_2 heeft doorgevoerd, dan komt men met doorvoering van waterstof of stikstof gedurende twee uren niet uit, m. a. w. al het CO_2 is dan nog niet uitgedreven. Een krachtige waterstof- en stikstofstroom van drie uren bleek echter voldoende te zijn.

De volgene tabel IV toont dit aan.

TABEL IV.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
	Bloed, energisch met zuurstof behandeld.	Door bloed *a* een uur CO_2 gevoerd.	Bloed *b*, gedurende twee uren aan de inwerking van waterstof blootgesteld	Bloed *b*, gedurende drie uren aan de inwerking van waterstof blootgesteld	Bloed *b*, gedurende twee uren aan de inwerking van stikstof blootgesteld	Bloed *b*, gedurende drie uren aan de inwerking van stikstof blootgesteld.
Specifiek gewicht van het serum...	1028	1032	1028.5	1028	1029	1028
Vaste bestanddeelen in 50 cM^3 serum..	4.736	5.159	4.957	4.801	4.899	4.810
cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$ overeenkomende met het chloor v. 100 cM^3 serum...	95.7	87.2	94.1	95.2	93.8	95.1

Nog een vraag wenschten we hier op te lossen.

e. *Gehoorzamen de bloedlichaampjes na behandeling met* CO_2 *nog aan de wetten der isotonische coëfficienten?*

Om dit te onderzoeken, vermengden we 2 cM^3 gedefibrineerd O-houdend bloed met 20 cM^3 eener oplossing van NaCl van 0.54, 0.56, 0.58, 0.6, 0.62 en 0.64 pCt., en zagen dat een weinig kleurstof uittrad in een NaCl-oplossing van 0.56 pCt., dat daarentegen geen spoor kleurstof uittrad in een NaCl-oplossing van 0.58 pCt.

Er werden nu ook isotonische KNO_3- en rietsuikeroplossingen bereid, n.l. KNO_3-oplossingen van 0.96 en 1 pCt. en rietsuikeroplossingen van 4.95 en 5.13 pCt. Natuurlijk waren de berekende concentraties ook die, welke de proef als resultaat aangaf voor de grenzen voor het uittreden en niet uittreden van kleurstof.

Thans werd gezocht in welke NaCl-oplossing het met CO_2 behandelde bloed, uittreden van kleurstof vertoonde. De gezochte NaCl-oplossing had een concentratie van 0.84 pCt. In een oplossing van 0.86 pCt. daarentegen hadden de bloedlichaampjes geen spoor kleurstof afgegeven.

Nu werden ook KNO_4-oplossingen bereid van 1.4 pCt. en 1.47 pCt., isotonisch respectievelijk met een NaCl-oplossing van 0.84 pCt. en 0.86 pCt., en ook rietsuikeroplossingen van 7.18 pCt en 7.54 pCt., eveneens isotonisch met een NaCl-oplossing van 0.84 pCt en 0.86 pCt. En wat bleek nu? Na vermenging van deze KNO_3- en rietsuikeroplossingen met bloed, dat met CO_2 was behandeld, en na bezinking der bloedlichaampjes waren de bovenstaande vloeistoffen rood, waar KNO_3-oplossingen van 1.4 en rietsuikeroplossingen van 7.18 pCt. gebruikt waren; kleurloos daarentegen, waar gebruik gemaakt was van een KNO_3-oplossing van 1.47 pCt. en een rietsuiker-solutie van 7.54 pCt.

Uit deze proeven blijkt dus, dat de bloedlichaampjes, ook na behandeling met CO_2, aan de wetten der isotonische coëfficienten gehoorzamen, voor zoover die zich uiten in het uittreden van kleurstof in zoutoplossingen.

RÉSUMÉ EN BESLUIT.

Wij kunnen de resultaten van bovengemelde proeven aldus samenvatten;

1°. *door inwerking van CO_2 op gedefibrineerd bloed wordt de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes gewijzigd. Hierdoor heeft een wisseling plaats tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum.*

2°. *Bij deze aanzienlijke wisseling van bestanddeelen blijft de osmotische spanning van bloedlichaampjes en serum onveranderd.*

3°. *De wijziging in permeabiliteit, welke de bloedlichaampjes door inwerking van CO_2 ondergaan, is niet blijvend. De oorspronkelijke permeabiliteit herstelt zich weer volkomen door inwerking van indifferente gassen, als zuurstof, waterstof en stikstof.*

4°. *De met CO_2 behandelde bloedlichaampjes blijven, ten opzichte van het uittreden van kleurstof door zoutoplossingen, in weerwil van hun gewijzigde permeabiliteit, de wetten der isotonische coëfficienten volgen.*

De beteekenis dezer feiten is niet gering te schatten, wanneer men ze overdraagt op het circuleerende bloed. En dat dit geoorloofd is, hebben onze vroegere onderzoekingen *) voldoende bewezen.

Zooals bekend is, komt het bloed beladen met zuurstof in de capillaria aan en bewerkt oxydatie van voedingsbestanddeelen, naar sommigen reeds in de bloedcapillaria zelf †) naar anderen in de weefsels §).

Het daardoor ontstane CO_2 wordt opgenomen, deels door lymphe deels door het bloedplasma, deels door de bloedlichaampjes, maar wordt in ieder geval toch weer in hoofdzaak naar de longen gevoerd om daar te ontwijken. Het CO_2 is naar deze opvatting niet veel meer dan een afvalproduct. Een beteekenis van activiteit heeft het niet.

---

*) Over de regeling der bloedbestanddeelen bij kunstmatige hydraemische plethora, hydraemie en anhydraemie. *Verslagen en Mededeelingen enz.*, 3e Reeks, deel VII, pag. 364.

†) Ludwig, Alex. Schmidt, e. a,

§) Max. Schulze, Pflüger, Oertmann, e. a.

Blijkens onze proeven moet men aan het CO_2 een hoogere beteekenis voor de stofwisseling toekennen. Wanneer het CO_2 toch, het bloedlichaampje veneus maakt, wordt tevens de permeabiliteit er van veranderd. Hiervan is het gevolg een wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en omgeving.

Aldus kunnen stoffen, die in de weefsels zich bevonden en daarna door celfunctie *) der capillaria, misschien ook gedeeltelijk door zuiver osmotische werking in het plasma werden overgebracht, in de bloedlichaampjes worden opgenomen.

Op deze wijze worden tal van stoffen met de bloedlichaampjes meegevoerd naar de longen. Daar kunnen ze nu geoxydeerd worden. Het behoeft geen betoog, dat de voorwaarden voor oxydatie in de bloedlichaampjes gunstiger zijn dan in het plasma en men zou zich kunnen voorstellen, dat sommige stoffen, wèl in de bloedlichaampjes, doch niet in het plasma, voor oxydatie vatbaar zijn.

Het ligt voor de hand, dat de oxydatie-producten een ander osmotisch aequivalent zullen bezitten dan de oorspronkelijke stoffen en dat de oxydatie-producten dus geheel of gedeeltelijk in het plasma zullen overgaan. Tot dien overgang dragen de zuurstof en wellicht ook de stikstof, beiden thans als indifferente gassen het hunne bij; immers onze proeven leerden, dat na doorvoering van O, N en H door bloed, hetwelk met CO_2 was behandeld, de oorspronkelijke permeabiliteit weer hersteld werd. Reeds tengevolge van het verdrijven van CO_2 alleen, heeft dus verandering van permeabiliteit en derhalve wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en plasma plaats.

Wij zouden ons te zeer op het gebied van speculatieve beschouwingen begeven, indien we hier ook wilden uiteenzetten, welken invloed de verandering van permeabiliteit der bloedlichaampjes tengevolge van de gaswisseling zou

---

*) Over de regeling van bloedbestanddeelen, enz. pag. 418.
R. Heidenhain, Pflüger's *Archiv*. B. XLIX, Heft 5 en 6, s. 280.

kunnen uitoefenen op de producten, die door de lymphe en het plasma van het veneuse bloed naar de longen worden gevoerd.

Evenmin wenschen we thans na te gaan, welke beteekenis de permeabiliteit zou kunnen hebben voor de stofwisseling der verschillende organen in verband met hun specifieke functies.

Wij hopen later hierop terug te komen.

Physiol. Laborat. der Rijks-Veeartsenijschool.
Utrecht Sept. 1891.

DE KINETISCHE ENERGIE DER CENTRALE BEWEGING.

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

1. Wanneer men bij de centrale beweging van een stoffelijk punt de snelheid ontbindt volgens den voerstraal, die van het zich bewegende punt naar het middenpunt van aantrekking gaat en loodrecht op dien voerstraal, kunnen wij voor beide bewegingen de kinetische energie (halve levende kracht) bepalen, en blijkbaar is de bewegingsenergie van het deeltje gelijk de som der energiën der beide composanten van beweging, of, als wij de energie der beweging langs den voerstraal T_1, de energie der beweging loodrecht er op T_2, de totale energie T noemen, geeft de gewone notatie der polaire coördinaten, waarbij het aantrekkingscentrum met den oorsprong samenvalt,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}.$$

Wij stellen ons voor de hier voorkomende uitdrukkingen nader te onderzoeken voor de parabolische- en in hoofdtrekken voor de elliptische beweging om een der brandpunten als aantrekkend centrum. Daarna willen wij nagaan hoe deze energiewaarden met den tijd veranderen en zullen daarbij tot merkwaardige punten in deze banen komen. Eindelijk zullen wij de uitdrukking

$$A = 2\int T\,dt,$$

die tot de bepaling der karakteristieke functie leidt en die aangeeft wat HAMILTON de werking (Action) heeft genoemd, voor deze bewegingsvormen trachten op te sporen. Wij vinden daardoor de gemiddelde kinetische energie voor een bepaalden tijd of voor een bepaald deel der baan.

2. *De Parabool.* Zij hare polaire vergelijking

$$r = \frac{k}{1 + \cos\varphi} = \frac{2\,a}{1 + \cos\varphi},$$

waarin a de aanvankelijke voerstraal voor de in den top der parabool beginnende beweging aangeeft.

Wij vinden:

$$d\,v^2 = -\,2\,R\,d\,r = -\,\frac{2\,\mu}{r^2}\,d\,r,$$

waarin $R = -\,\frac{\mu}{r^2}$ de naar het centrum gerichte versnelling aanduidt.

Dan volgt

$$v^2 = \frac{2\,\mu}{r} \qquad T = \frac{m\,\mu}{r} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Volgens de wet der perken is $r^2 d\,\varphi = C\,d\,t$ en volgt voor de bepaling van C

$$v^2 = \left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2 = \left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 = \left(\frac{d\,r}{d\varphi}\right)^2\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\,t}\right)^2$$

$$= C^2\left\{\left(\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\,\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = C^2\left\{\frac{\sin^2\varphi}{k^2} + \frac{(1 + \cos\varphi)^2}{k^2}\right\}$$

$$= \frac{2\,C^2}{k^2}\,(1 + \cos\varphi) = \frac{2\,C^2}{k\,r} = \frac{2\,\mu}{r},$$

zoodat

$$C^2 = \mu\,k \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Verder volgt de belangrijke betrekking

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=r\sqrt{\frac{r-a}{a}}\cdot\frac{\sqrt{2\mu a}}{r^2}=\sqrt{2\mu}\cdot\frac{\sqrt{r-a}}{r}\quad\ldots(3)$$

en uit deze betrekkingen volgt terstond:

$$\left.\begin{aligned}T_1&=\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{m\,.\,\mu}{r^2}(r-a)\\T_2&=\frac{m}{2}r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{m\,.\,\mu}{r^2}\cdot a\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

3. Door herleiding volgt voor de drie energie uitdrukkingen nog

$$T=\frac{m\mu}{r^2}\cdot r\qquad\qquad T_1=\frac{m\mu}{r^2}(r-a)\qquad\qquad T_2=\frac{m\mu}{r^2}\cdot a$$

$$=\frac{m\mu}{k}(1+\cos\varphi)\qquad\qquad=\frac{m\mu a}{r^2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$=\frac{m\mu}{4a}\sin^2\varphi+\frac{m\mu a}{r^2}\qquad\qquad=\frac{m\mu}{4a}\sin^2\varphi$$

Uit de vergelijking dezer vormen volgt voor de verhouding der energiewaarden

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{T_1}{T}=\frac{r-a}{r}=\frac{1-\cos\varphi}{2}\\\beta&=\frac{T_2}{T}=\frac{a}{r}=\frac{1+\cos\varphi}{2}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\left.\begin{aligned}T_1&=T\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\\T_2&=T\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\end{aligned}\right\},\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5_a)$$

$$\gamma=\frac{T_1}{T_2}=\frac{r-a}{a}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}=\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi.\quad\ldots\ldots(5_b)$$

Uit (5) volgt, dat als wij $\psi=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ nemen

$$T_1=T\cos^2\psi\qquad\qquad T_2=T\sin^2\psi\quad\ldots\ldots(6)$$

de raaklijn maakt dus een hoek $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ met den voerstraal.

Verder zal $T_1 = T_2$ zijn als $\psi = \frac{\pi}{4}$ dus $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d. i. in de punten, waar de ordinaat van het brandpunt de kromme snijdt. Voor waarden van $\varphi < \frac{\pi}{2}$ zal $T_1 < T_2$, voor $\varphi > \frac{\pi}{2}$ wordt $T_1 > T_2$.

Volgens (5_b) is de verhouding van T_1 en T_2 voor eenig punt dezelfde als die der stukken, waarin de voerstraal uit het brandpunt door den cirkel verdeeld wordt, die om het brandpunt met den straal a beschreven is; blijkbaar wordt met toenemende φ de verhouding $\frac{r-a}{r}$ steeds grooter, terwijl $\frac{a}{r}$ afneemt.

Noemen wij den voerstraal in den aanvang, als het punt in den top is ϱ, stellen wij de verhouding $\frac{\varrho}{r} = u$, dan laten zich de verhoudingen α en β uit (5) voorstellen door

$$\alpha = 1 - \frac{\varrho}{r} = 1 - u \qquad \beta = \frac{\varrho}{r} = u \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

4. Wanneer een punt zich op de bovenaangeduide wijze volgens eene parabool beweegt, kunnen wij de veranderingen der drie energievormen met den tijd bepalen en hun verloop nagaan.

Wegens de bovenvermelde waarde (3)

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2\mu} \cdot \frac{\sqrt{r-a}}{r}$$

volgt:

$$\frac{dT}{dt} = - \; r \sqrt{r-a} \; . \; \frac{m\mu\sqrt{2\mu}}{r^4}$$

$$\frac{dT_1}{dt} = (2a-r)\sqrt{r-a} \; . \; \frac{m\mu\sqrt{2\mu}}{r^4}$$

$$\frac{dT_2}{dt} = - \; 2a\sqrt{r-a} \; . \; \frac{m\mu\sqrt{2\mu}}{r^4}$$

Hieruit volgt dat T voortdurend met den tijd vermindert, zooals trouwens uit (1) $v^2 = \frac{2\mu}{r}$ terstond blijkt.

Evenzoo neemt T_2, de energie van draaiing loodrecht op den voerstraal voortdurend af. T_1 zal echter in den aanvang van nul af toenemen en wanneer zij eene maximumwaarde heeft bereikt, voortdurend afnemen. Die maximumwaarde volgt voor

$r = 2a$, dus voor $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$; in die punten is $_1 = T_2 = \frac{1}{2} T$.

Van $\varphi = 0$ tot $\varphi = 90^0$ is $T_1 < T_2$, van daar af tot $\varphi = 180^0$ blijft $T_1 > T_2$.

Wat verder de maximum- of minimumwaarden hunner differentiaalquotiënten betreft, wij zien, dat

$\frac{d^2 T}{d t^2}$ verdwijnt voor $r = a$ en $r = \frac{6}{5} a$, dat is voor $\varphi = 0$, en $\cos\varphi = {}^2/_3$ of $\varphi = 48^0 11'$.

Voor de eerste waarde is dit de aanvang der beweging; voor de tweede waarde is $\frac{d\,T}{d\,t}$ een negatief maximum.

$\frac{d^2 T_1}{d t^2}$ verdwijnt voor waarden van r, bepaald door de vergelijking:

$$5\,r^2 - 20\,ar + 16\,a^2 = 0,$$

dus voor $r = \frac{2\,(5 \mp \sqrt{5})}{5}\,a$; dan wordt $\cos.\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$, derhalve als $\varphi = \pm 36^0$ en $\varphi = \pm 108^0$. $\frac{d\,T_1}{dt}$ heeft bij 36^0 eene minimum-, bij 108^0 eene maximumwaarde.

Wat eindelijk $\frac{d^2 T_2}{d t^2}$ betreft, het blijkt dat dit quotiënt verdwijnt voor $r = \frac{8}{7}\,a$, dat is voor $\cos.\varphi = \frac{3}{4}$, dus voor $\varphi = \pm 41^0\,24'$. Daar $\frac{d\,T_2}{dl}$ verdwijnt voor $\varphi = 0$ en

$\varphi = 180^0$ en $\frac{d\,T_2}{d\,t}$ negatief is, volgt een negatief maximum voor dit differentiaalquotiënt.

Dus blijkt, dat bij de parabolische beweging zich ten opzichte der kinetische energie *merkwaardige* punten voordoen; zij zijn in rangorde de volgende:

$r = a$	$\varphi = 0^0$	T_1 minimum ; $T_2 = T$ max.
$r = \frac{2(5 - \sqrt{5})}{5}\,a$	$\varphi = 36'$	$\frac{dT_1}{dt}$ maximum
$r = \frac{8}{7}$	$\varphi = 41^0 24'$	$\frac{dT_2}{dt}$ maximum
$r = \frac{6}{5}$	$\varphi = 48^0 11'$	$\frac{dT}{dt}$ maximum
$r = 2a$	$\varphi = 90^0$	T_1 maximum; $T_1 = T_2$
$r = \frac{2(5 + \sqrt{5})}{5}\,a$	$\varphi = 108^0$	$\frac{dT_1}{dt}$ maximum
$r =$ oneindig	$\varphi = 180^0$	$T = T_1 = T_2 = 0.$

en deze wet geldt voor iedere parabolische beweging, die een gevolg is van aantrekking uit het brandpunt volgens de wet der graviteit, $R = \frac{\mu}{r^2}$.

5. Bepalen wij thans de waarde van $A = 2\int T dt$ voor de parabolische beweging om het brandpunt als centrum. Ook hier kunnen wij $A = A_1 + A_2$ als de som beschouwen dezer waarden voor de beweging langs den voerstraal en loodrecht daarop.

Wij vinden achtereenvolgens:

$$A = 2\int T dt = 2\int \frac{m\mu}{r}\,dt \text{ of, wegens (3)}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2\mu}\,\frac{\sqrt{r-a}}{r}.$$

$$A = m\sqrt{2\mu}\int \frac{dr}{\sqrt{r-a}} = 2m\,C\sqrt{\frac{r-a}{a}};$$

de integratieconstante verdwijnt, daar voor $r = a$, $A = 0$ moet zijn. Wegens $r = \frac{2a}{1 + cos.\,\varphi}$, wordt

$$2\sqrt{\frac{r-a}{a}} = \frac{r\, sin.\, \varphi}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (8$$

Merken wij op, dat dus $A = \frac{mC}{a}y$, evenredig is aan den ordinaat van het punt, waar A genomen wordt en dat zich nog schrijven laat:

$$A = \frac{2\, m\, C\, sin.\, \varphi}{1 + cos.\, \varphi} = 2\, m\, C\, tg\, \frac{1}{2}\, \varphi \quad \ldots\ldots (8a)$$

Voor A_1 volgt, daar $T_1 = \frac{m\mu}{r^2}(r - a)$,

$$A_1 = 2\, m\, \mu \int \frac{r-a}{r^2}\, dt = m\sqrt{2\mu}\int \frac{\sqrt{r-a}}{r}\, dr\,,$$

dus

$$A_1 = 2\, m\sqrt{2\, a\, \mu}\left(\sqrt{\frac{r-a}{a}} - Btg\sqrt{\frac{r-a}{a}}\right) \quad . (9)$$

of

$$A_1 = 2\, m\, C\left(tg\, \frac{1}{2}\, \varphi - \frac{1}{2}\, \varphi\right) \quad \ldots\ldots (9a)$$

Daar $A_2 = A - A_1$, volgt uit (8a) en (9a) $A_2 = m\, C\varphi$. Deze waarde wordt trouwens spoedig door directe rekening verkregen:

$$T_2 = \frac{m\mu}{r^2}\, a \text{ geeft } A_2 = 2m\mu a \int \frac{dt}{r^2} = ma\sqrt{2\mu}.\int \frac{dr}{r\sqrt{r-a}}.$$

Waaruit, daar $\int \frac{dr}{r\sqrt{r-a}} = \frac{2}{\sqrt{a}} B\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{r-a}{a}}$, volgt:

$$A_2 = 2\, m\, C.\, B\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{r-a}{a}} \quad \ldots\ldots (10)$$

of daar $\sqrt{\frac{r-a}{a}} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$

$$A_2 = m\,C\,\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (10a)$$

Wij hebben dus, alles in r of φ uitdrukkende,

$$A = 2\,m\,C \sqrt{\frac{r-a}{a}} = 2\,m\,C \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi$$

$$A_1 = 2mC\left\{\sqrt{\frac{r-a}{a}} - B\operatorname{tg}\sqrt{\frac{r-a}{a}}\right\} = 2mC(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$A_2 = 2\,m\,C.B \operatorname{tg} \sqrt{\frac{r-a}{a}} \qquad = 2\,m\,C.\tfrac{1}{2}\varphi,$$

waarvoor wij nog kunnen schrijven, daar

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{r \sin\varphi}{2\,a},$$

$$A = 2\,m\,C \frac{r \sin\varphi}{2\,a}$$

$$A_1 = 2\,m\,C\left(\frac{r\sin\varphi}{2\,a} - B \operatorname{tg} \frac{r \sin\varphi}{a\,a}\right)$$

$$A_2 = 2\,m\,C.\,B \operatorname{tg} \frac{r \sin\varphi}{2\,a}.$$

Merken wij eindelijk op, dat

1°. in de punten waar $A_1 = A_2$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = \varphi$ derhalve

$$\varphi = \pm\, 133°32',$$

dat is nabij de punten

$$\varphi = \pm\, \tfrac{3}{4}\pi.$$

2°. dat voor $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$A = 2\,m\,C$$

$$A_1 = 2\,m\,C\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$A_2 = 2\,m\,C.\,\frac{\pi}{4},$$

zoodat hier

$$(\alpha) = \frac{A_1}{A} = 1 - \frac{\pi}{4};$$

$$(\beta) = \frac{A_2}{A} = \frac{\pi}{4};$$

de algemeene waarden dezer vormen zijn:

$$(\alpha) = 1 - \frac{\varphi}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}$$

$$(\beta) = \frac{\varphi}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}$$

3°. dat de gemiddelde energie gegeven wordt door:

$$\overline{T} = \frac{A}{2t} = \frac{1}{t}\int T\,dt$$

$$t = \frac{1}{C}\int r^2 d\varphi = \frac{4a^2}{C}\int \frac{d\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2} = \frac{2a^2}{C}(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2}\varphi)$$

dus

$$\overline{T} = \frac{m\,C \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}{t} = \frac{m\mu}{a}\,\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}\varphi}; \quad . \; . \; . \; (11)$$

voor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ volgt:

$$\overline{T} = \frac{3}{4}\frac{m\mu}{a},$$

zijnde in dit geval juist de gemiddelde der waarden van T aan de einden van den boog.

Eveneens vindt men

$$\overline{T_1} = \frac{m\mu}{a} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11a)$$

$$\overline{T_2} = \frac{m\mu}{a} \cdot \frac{\frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}\varphi}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11b)$$

zoodat voor $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\overline{T_1} = \frac{3}{16}(4-\pi)\frac{m\mu}{a}$$

$$\overline{T_2} = \frac{3}{16}\,\pi\,\frac{m\mu}{a}$$

6. *De ellips.* Zij hare vergelijking, waarbij het aantrekkend brandpunt als oorsprong genomen wordt,

$$r = \frac{k}{1+e\cos\varphi} = a\,\frac{1-e^2}{1+e\cos\varphi},$$

waarin a de halve groote as en e de excentriciteit; de tijd wordt gerekend van af het verlaten van het einde der groote as. Dan zal als de kracht $R = \frac{m\mu}{r^2}$, voor de snelheid en voor $C = r^2\frac{d\varphi}{dt}$ volgen, zooals wij hier bekend aannemen,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$C^2 = \mu a(1-e^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Derhalve volgt voor de drie energievormen:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m\mu}{2a}\left(\frac{2a-r}{r}\right) \\ T_2 &= \frac{mr^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\frac{C^2}{r^2} = \frac{m\mu}{2a}\left(\frac{a^2(1-e^2)}{r^2}\right) \\ T_1 &= T - T_2 = \frac{m\mu}{2a}\left(\frac{a^2e^2-(r-a)^2}{r^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad . . (14)$$

hieruit volgt verder:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{T_1}{T} = \frac{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)}{r(2a-r)} \\ \beta &= \frac{T_2}{T} = \frac{a^2(1-e^2)}{r(2a-r)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (15)$$

of, wanneer wij den voerstraal bij den aanvang, $a(1-e)$ door ϱ en den afstand van het tweede brandpunt tot hetzelfde aanvangpunt $a(1+e)$ door ϱ' aanduiden en eveneens den voerstraal naar het bewegende punt van uit het tweede brandpunt $r - 2a = r'$ stellen,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\varrho'}{r'} = 1 - uu' \\ \beta &= \frac{\varrho}{r} \cdot \frac{\varrho'}{r'} = uu' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

zijnde eene merkwaardige uitbreiding van het resultaat onder form. (7) voor de parabool gevonden. Deze treedt hier als eene ellips op, waarvan een der brandpunten in het oneindige ligt.

Nog volgt:

$$\gamma = \frac{T_1}{T_2} = \frac{rr' - \varrho\varrho'}{\varrho\varrho'} \ldots \quad \ldots\ldots (16_a)$$

7. Uit (15) en (16) volgt, dat bij den aanvang $T_1 = 0$, $T_2 = T$; T_1 neemt daarna toe, T_2 neemt af en beide waarden worden gelijk, wanneer de raaklijn gelijke hoeken met voerstraal en loodlijn maakt, d. i. wanneer de raaklijn een hoek van 45° met den voerstraal vormt. Hieraan voldoen de punten, waarin de cirkel, die de verbindingslijn der brandpunten tot middellijn heeft, de ellips ontmoet.

In het algemeen kunnen er dus *vier* punten zijn, voor welke $T_1 = T_2$; wanneer $ae = b$, zijn er slechts *twee*, de uiteinden der kleine as, in welke uiteinden genoemde cirkel dan de ellips raakt.

De snijding wordt onbestaanbaar, wanneer $ae < b$ of wat hetzelfde is, voor de mogelijkheid dat $T_1 = T_2$ wordt gevorderd, dat $e^2 > \frac{1}{2}$. Wanneer $ae < b$ blijft T_2 altijd grooter dan T_1.

De genoemde regel is blijkbaar eene uitbreiding van het in N°. 3 voor de parabool gevondene; daar was een der brandpunten op oneindigen afstand; de cirkel gaat dan over in eene lijn loodrecht op de as door het brandpunt getrokken, zooals ook voor de parabool gevonden is.

Omtrent de differentiaalquotiënten van T_1 T_2 T_3 ten opzichte van den tijd zullen wij voor de ellips in geen nader onderzoek treden, doch slechts opmerken, dat wat de daarvoor noodige waarde van $\frac{dr}{dt}$ voor dit geval aangaat (vergel. N⁰. 2 form. (3)) uit de voor $T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ gevondene uitdrukking volgt,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} . \frac{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}{r} \ldots\ldots (17)$$

8. Wat betreft de waarde van $A = 2\int T\,dt$ voor de ellips, wij vinden met de in (14) gevondene waarde van T, wegens (7)

$$A = \frac{m\mu}{r}\int\frac{2a-r}{r}dt = m\sqrt{\frac{\mu}{a}}\int\frac{2a-r}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}dr;$$

na integratie en bepaling der integratieconstante uit de voorwaarde $A = 0$ als $r = a(1-e)$, volgt

$$A = mC\left\{\frac{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}{a\sqrt{1-e^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}B\cos\frac{a-r}{ae}\right\} \ldots (18)$$

of in φ uitgedrukt,

$$A = mC\left\{\frac{e\sin\varphi}{1+e\cos\varphi} + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}B\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \ldots (18_a)$$

De laatste formule, die zich met behulp der betrekking

$$\frac{dr}{dt} = e\sin\varphi\sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \ldots\ldots\ldots (19)$$

vergel. (13), terstond laat afleiden, volgt hier uit (18) na eliminatie van r door middel van de vergelijking der ellips.

Voor bijzondere waarden van r en φ geven bovenstaande uitdrukkingen een merkwaardig resultaat. Zoo volgt voor den *geheelen omtrek der ellips*,

$$A = \frac{2\pi m C}{\sqrt{1-e^2}}$$

of wegens (13) $C = \sqrt{\mu a (1-e^2)}$

$$A = 2\pi m \sqrt{\mu a} \quad \dots\dots\dots \quad (20)$$

d. i. A is onafhankelijk van de excentriciteit; (20) geldt dus ook voor den cirkel, waarvan a de straal is.

Voor een gedeelte van den cirkelomtrek, volgt als a de straal en $a\varphi$ de boog is,

$$A = m C \varphi = \varphi m \sqrt{\mu a} \quad \dots\dots\dots \quad (21)$$

Wat de ellips betreft, de in (20) gegevene waarde voor den geheelen omtrek bestaat voor de vier quadranten uit ongelijke deelen en wegens $C = \sqrt{\mu a (1-e^2)}$, zal vergelijking (18), overgaan in

$$A = m \sqrt{u a} \left\{ \frac{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}}{a} + B \cos \frac{a-r}{a e} \right\}$$

en hieruit volgt voor

$$\left.\begin{array}{llll} \text{het } 1^e & \text{quadrant} & \left(\frac{\pi}{2} + e\right) m \sqrt{\mu a} \\ \text{» } 2^e & \text{»} & \left(\frac{\pi}{2} - e\right) m \sqrt{\mu a} \\ \text{» } 3^e & \text{»} & \left(\frac{\pi}{2} - e\right) m \sqrt{\mu a} \\ \text{» } 4^e & \text{»} & \left(\frac{\pi}{2} + e\right) m \sqrt{\mu a} \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (22)$$

Het in (20) aangegevene totale bedrag

$$A = 2\pi m \sqrt{\mu a}$$

is dus ongelijkmatig, doch noodwendig symmetrisch over de vier quadranten verbreid en hoewel A van de excentriciteit

onafhankelijk is, zoo zij over den geheelen omtrek der ellips wordt genomen, hangt A wel van de excentriciteit af, wanneer het de bogen der quadranten eener ellips geldt, in gevolge de in (22) gegevene waarden.

9. In de beide behandelde gevallen was voor *enkele* punten der banen $T_1 = T_2$. Men kan zich de vraag stellen, voor welke krommen dien eisch in *alle* punten voldaan is.

Daar in dit geval de voerstraal een hoek $\mu = 45^0$ met de raaklijn vormt, wordt vereischt dat

$$\text{tg}\,\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr} = 1,$$

waaruit

$$\frac{dr}{r} = d\varphi \quad \text{of} \quad r = a\,e^{\varphi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

zijnde de *logarithmische spiraal.*

Meer algemeen kan men vragen naar de banen, voor welke de verhouding der beide energiën in *ieder* punt dezelfde is, zoodat.

$$\frac{T_1}{T_2} = m^2$$

dan volgt, daar $T_1 = T\,cos^2\,\mu$, $T_2 = T\,sin^2\,\mu$

$$\text{tang}\,\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr} = m,$$

waaruit

$$r = a\,e^{\frac{\varphi}{m}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

m als veranderlijk beschouwende, ontstaat een stelsel spiralen, waarvan (23) als bijzonder *middengeval* optreedt; voor $m = 1$, is dan $T_1 = T_2$ en $\mu = \frac{\pi}{4}$.

Aan de grenzen van dit stelsel (24) staan:

1°. de cirkel voor $m = \infty$, $r = a$;

2°. de rechte lijn voor $m = 0$.

Voor den cirkel wordt bij $m = \infty$, $T_1 = 0$.

Voor de rechte lijn bij $m = 0$, verdwijnt T_2.

Bij de door ons beschouwde parabolische en elliptische beweging was m veranderlijk van punt tot punt. Voor eene meer algemeene behandeling van het hier behandelde wijzen wij op eene verhandeling van Dr. G. Schouten, voorkomende in het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Deel 18, blz. 19. Ons doel was de parabolische en elliptische beweging bij aantrekking van uit een brandpunt meer in het bijzonder na te gaan, wat T, T_1 en T_2 betreft. Die bewegingen worden gekarakteriseerd door de vergelijkingen (7) en (16).

Utrecht, October 1891.

EEN VRAAGSTUK

DER

GEOMETRIA SITUS

TOEGELICHT DOOR

P. H. SCHOUTE.



In het dit jaar verschenen eerste deel van de *Théorie des nombres* van E. Lucas lezen we op blz. 120 het volgende:

»*Exemple II. — La bande de timbres-poste.* — De combien de manières peut-on replier, sur un seul, une bande de p timbres-poste?

»*Exemple III. — La feuille de timbres-poste.* — De combien de manières peut-on replier, sur un seul, une feuille rectangulaire de pq timbres-poste?

»Nous ne connaissons aucune solution de ces deux problèmes difficiles proposés par M. Em. Lemoine."

Het volgende bevat eenige opmerkingen omtrent beide vraagstukken.

Gaat men uit van een bepaalde opvouwingswijs (fig. 1[a]) van een lint van zeven postzegels, dan kan men gemakkelijk nagaan, hoeveel verschillende opvouwingen van acht postzegels uit deze eene af te leiden zijn. De aan 7 verbonden 8 kan of geheel bovenaan, of onmiddellijk boven 7, of onmiddellijk onder 7, of geheel onderaan worden aangebracht.

Laat men om een weldra te noemen reden alle oplossin-

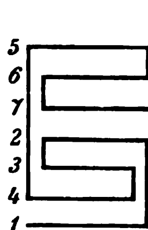


Fig. 1*a*

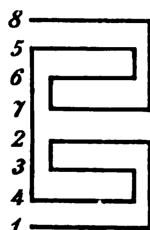


Fig. 1*b*

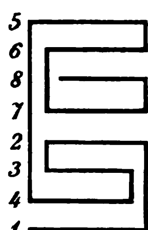


Fig. 1*c*

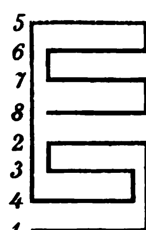


Fig. 1*d*

gen weg, waarbij 1 zich niet onderaan bevindt, dan volgen dus uit 1^a de drie »derivaten" 1^b, 1^c, 1^d. Deze opmerking doet een middel aan de hand om stelselmatig van n op $n + 1$ voortgaande alle oplossingen en dus ook het aantal dier oplossingen te vinden.

Het postzegelvraagstuk, dat tot de »meetkunde der ligging" behoort, laat zich geheel op getallen overbrengen met behulp van twee eenvoudige opmerkingen. Volgens de eene bevinden zich de verbindingen 12, 34, 56, ... ($2n$—1, $2n$) allen aan de eene zijde bijv. rechts en de verbindingen 23, 45, 67, . . . ($2n$, $2n + 1$) aan de andere zijde, dus links. Volgens de tweede zullen de aan een zelfde zij gelegen verbindingen elkaar niet kunnen doorkruisen. Zoo is de volgorde 1423 onmogelijk, omdat de verbinding 34 niet tot stand komen kan (fig. 2). Hieruit

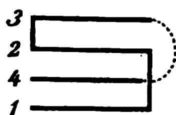


Fig. 2.

volgt nu, dat het aantal opvouwingswijzen van een lint van p postzegels gelijk is aan het aantal permutaties van de p cijfers 1, 2, 3 . . . . . p, waarbij het niet gebeurt dat twee *gelijksoortige* verbindingen 12, 34, 56 . . . . of 23, 45, 67 . . . . . elkaar scheiden. En hierbij komt men dan van de oplossing 1 4 3 2 7 6 5 (fig. 1^a) weer tot de drie derivaten 1 4 3 2 7 6 5 8, 1 4 3 2 7 8 6 5, 1 4 3 2 8 7 6 5 (en 8 1 4 3 2 7 6 5, als men zich niet beperkt tot de met 1 beginnende oplossingen), die in de figuren 1^b, 1^c, 1^d op doorsnee voorgesteld zijn. Wijl bij het opschrijven der oplossingen blijkt, dat het aantal der met een van de cijfers 2, 3 . . . . p beginnende aan dat der met 1 beginnende

gelijk is, kan men zich bij het opschrijven der oplossingen beperken tot de met 1 beginnende.

Langs den aangegeven weg verkrijgt men de volgende tabel.

3.... 3 (1.2) = 6
4.... 4 (2.2) = 16
5.... 5 (2.2 + 2.3) = 50
6.... 6 (6.2 + 4.3) = 144
7.... 7 (10.2 + 10.3 + 4.4) = 462
8.... 8 (32.2 + 26.3 + 8.4) = 1392
9.... 9 (68.2 + 65.3 + 33.4 + 8.5) = 4527.

Wat in deze tabel achter elk der cijfers tusschen haakjes staat, is telkens het aantal der met de eenheid beginnende permutaties, terwijl de groepeering wijst op de afleiding uit de reeks van oplossingen der naastlagere orde. Zoo beteekent de vorm 10.2 + 10.3 + 4.4, dat er van de 24 met 1 beginnende oplossingen van het vraagstuk der zes postzegels 10 zijn waaruit men 2, 10 waaruit men 3 en 4 waaruit men 4 met 1 beginnende oplossingen van het vraagstuk der zeven postzegels afleidt, enz. Ongelukkigerwijs is de wet van opvolging niet zoo doorzichtig, dat het bovenstaande zich op het algemeene geval van p postzegels laat uitbreiden.

Omdat door Laisant een fraaie oplossing gegeven is van een ander probleem voorkomende in het aangehaalde werk van Lucas (nl. het »problème des n menages") heb ik alvorens tot het doen van deze mededeeling over te gaan den genoemden franschen afgevaardigde gevraagd, of hij zich ook met het onderwerpelijke vraagstuk had bezig gehouden. Hij schrijft mij: »Quant aux timbres-poste, j'ai souvent causé de ce problème avec Lemoine et plusieurs de nos amis, notamment encore au congrès de Marseille (Septembre, 1891); mais il faudrait avant tout formuler l'énoncé d'une manière qui ne donne prise à aucune équivoque. En considérant seulement une bande et en supposant que le premier timbre reste immobile, j'ai trouvé les resultats suivants:

pour p = 2, 3, 4, 5, 6, 7,
X_p = 2, 6, 16, 50, 144, 462."

De juistheid van deze opmerking omtrent het stellen van

de vraag bleek mij ten duidelijkste bij de behandeling van het tweede vraagstuk, waartoe ik thans overga. Is het aantal oplossingen van het vraagstuk der p postzegels voorgesteld door X_p, dan schijnt dat van het vraagstuk omtrent het rechthoekige blad van $p\,q$ postzegels voorgesteld te kunnen worden door het product van $X_p\ X_q$ met het getal, dat aanwijst op hoeveel verschillende wijzen men de $p-1$ noodzakelijke omvouwingen in de lengte kan doen afwisselen met de $q-1$ noodzakelijke omvouwingen in de breedte. Dit getal is het aantal permutaties van $p+q-2$ elementen bestaande uit twee groepen, een van $p-1$ gelijkwaardige en een ander van $q-1$ gelijkwaardige, voorgesteld door $\frac{1^{p+q-2/1}}{1^{p-1/1}\,1^{q-1/1}}$ of door den binomiaalcoëfficient $\binom{p+q-2}{p-1}$. Is $X_{p,q}$ de gevraagde uitkomst, dan zou dus de betrekking

$$X_{p,q} = \binom{p+q-2}{p-1} X_p\ X_q$$

gelden, die voor $p = q$ is neergelegd in de tabel

2^2	8	6^2	5 225472
3^2	216	7^2	127 222256
4^2	5120	8^2	6650 067148
5^2	175000	9^2	263754 292230

Bovenstaande beschouwing is echter niet volledig. Dit blijkt gemakkelijk uit de behandeling van het geval $p = q = 3$. We hebben nl. bij het geval van fig. 3[a]

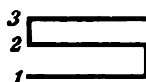


Fig. 3*a*

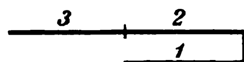


Fig. 3*b*

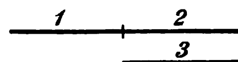


Fig. 3*c*

alleen op de einduitkomst gelet en buiten rekening gelaten, dat deze zoowel door den tusschentoestand van fig. 3[b] heen als door dien van fig. 3[c] heen te bereiken is. En neemt men nu aan, dat de omvouwing in de breedterichting bijv.

langs de lijn $\alpha\alpha$ (fig. 4) den tusschentoestand fixeert, dan verkrijgt men bij de twee handelwijzen, die bij het lint tot dezelfde einduitkomst voeren, voor het blad verschillende oplossingen. Hierdoor valt het werkelijke aantal $X_{p,\,q}$ steeds grooter uit dan wat bovenstaande formule geeft en vindt men voor 3^2 en 4^2 achtereenvolgens 296 en 16096 in stede van 216 en 5120. En rekent men die oplossingen van het eerste vraagstuk verschillend, waarbij dezelfde uitkomst door verschillende bewerkingen verkregen wordt, dan vindt men $X_3 = 8$, $X_4 = 48$, enz.

Fig. 4.

[Toen ik bovenstaande uitkomsten verkregen had, deelde ik ze schriftelijk aan Ed. Lucas mede, in de hoop, dat het hem gelukken mocht de algemeene uitdrukking voor X_p en $X_{p,\,q}$ te vinden. Weinig vermoedde ik toen, dat dit schrijven hem niet meer bereiken zou; een schijnbaar onbeduidende ziekte maakte plotseling een einde aan zijn werkzaam leven, kort nadat hij te Marseille op het congres van de fransche associatie de wiskundige afdeeling had gepresideerd. Zijn dood is een groot verlies voor de wiskundige wetenschap en vooral voor de getallenleer; hij veroorzaakt, zooals Laisant zich uitdrukt, »un vide de bien longtemps impossible à combler." Laat ons hopen, dat hij belangrijke manuscripten nagelaten heeft en het zijne vrienden gelukken mag uit deze de boven aangehaalde *Théorie des nombres*, van welk uitstekend werk tot heden slechts het eerste deel verscheen, te voltooien].

MEDEDEELINGEN OMTRENT DE GEOLOGIE VAN NEDERLAND, VERZAMELD DOOR DE COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK.

N°. 5.

KORT VERSLAG

VAN DE ONDERZOEKINGEN, OVER HOOGVENEN IN NOORD-BRABANT EN LIMBURG GEDAAN IN DEN ZOMER VAN 1891.

DOOR

Dr. J. LORIÉ.

Van het eerste standkwartier, Roosendaal, uit werd het voormalige hoogveen tusschen Zundert-Rucfen en Calmpthout bezocht, evenals in het vorige jaar andere hoogvenen.

Het doel was wederom de voorwaarden op te sporen, die aanleiding hadden gegeven tot het ontstaan van een hoogveen juist op deze plaats en tot zijne eigenaardige begrenzing.

Ook hier bleek weder eene duidelijke depressie aanwezig te zijn, vergelijkbaar met die van de aangrenzende dalen der Kleine Aa, ten W., en der Aa, ten O., hoewel toch in vele opzichten daarvan verschillend. Ook zandstuivingen namen herhaaldelijk deel aan de begrenzing van het hoogveen, hoewel in veel geringere mate dan bij de hoogvenen der Peel. Op een aantal plaatsen is eene nieuwe hoogveenvorming weder in vollen gang, zooals STARING reeds opmerkte, doch alleen met betrekking tot de oude turfvaarten.

Het scheen ons reeds vooraf toe, dat in Noord-Brabant de vorming van hoogvenen en die der vennen twee zaken zijn, die aanleiding geven tot eene vergelijkende studie. Om deze reden werd een bezoek gebracht aan de omstreken van Oirschot, waar deze vennen niet meer voorkomen, ten einde dit terrein te vergelijken met de heidestreken, waar zij wel gevonden worden.

Daarna werd tusschen Asten en Valkenswaard zulk een terrein onderzocht, en tevens bij eerstgenoemde plaats het gedeeltelijk afgegraven hoogveen.

De uitstappen, van Asten uit gemaakt, waren ten deele eene aanvulling, ten deele eene uitbreiding van die in den vorigen zomer.

Van het volgende standkwartier Neerpelt, in Belgisch Limburg, uit werd het hoogveen van Hamont onderzocht, waaraan ten vorigen jare, door het gevorderde jaargetijde, niet voldoende tijd kon besteed worden, alsmede de hoogveendepressie ten W. van Luiks-gestel. Bij deze onderzoekingen bleek het ook ten duidelijkste, dat de groote hoogvlakte van Maasdiluvium, op STARING's kaart tusschen Maastricht en Wychmael aangegeven, volstrekt niet aan deze plaats haar einde neemt, maar zich nog veel verder noordelijk voortzet, over Neerpelt, enz. tot aan de gelijksoortige terreinen ten W. en Z.W. van Valkenswaard. Eene poging om dat deel der hoogvlakte te bezoeken, waar de Dommel, die N.-waarts, en de Molenbeek, die aanvankelijk eveneens N.-, later O.-waarts vloeit, ontspringen, mislukte wegens het zeer vele water op de heiden, een gevolg der onophoudelijke regens. Ten slotte werd op dit reisje nog een uitstap gemaakt in den omtrek van St. Oedenrode bij Bokstel, waar de Dommel plotseling zijne Z.-N. richting voor eene O.-W. verlaat.

In Augustus werden de onderzoekingen in Limburg weder opgenomen, het eerst in den omtrek van Boksmeer. Hier werd het noordeinde van den St. Antonispeel nader onderzocht, in verband met het begin der Oeffeltsche Beek. Mede van Boksmeer uit, de aaneengeschakelde moerasvenen ten O. der Maas, aan den voet van het groote plateau van

grintdiluvium. Dit strekt zich in werkelijkheid tot de hoogte van Weeze uit, maar is op een paar plaatsen door laagten afgebroken, waardoor verbindingen ontstaan tusschen de dalen der Niers en der Maas. Eene dezer laagten bevat het Nierskanaal en vormt, volgens STARING's kaart, het noordeinde van het grintplateau. De depressie dezer moerasvenen begint bij Venloo en kan aanleiding gegeven hebben tot de stichting dezer plaats, zooals wij nader hopen aan te toonen. Van Roermond en Baexem uit werden ten slotte nog een paar tochten gemaakt in de dalen der beken, die de Neer samenstellen, en in de hoogvlakte met vennen, waaruit zij hunnen oorsprong nemen — een en ander ter aanvulling van hetgeen ten vorigen jare niet voldoende was waargenomen.

Utrecht, October 1891.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 November 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, MOLL, MAC GILLAVRY, HOFFMANN, VAN BEMMELEN, MICHAËLIS, RAUWENHOFF, WEBER, LORENTZ, BAKHUIS ROOZEBOOM, MULDER, VAN DER WAALS, KOSTER, PEKELHARING, STOKVIS, SCHOLS, KORTEWEG, SCHOUTE, BIERENS DE HAAN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, A. C. OUDEMANS, JR., HOEK, en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 5 November 1891; 2°. het Ministère de l'Instruction publique et des beaux-Arts te Parijs, 4 November 1891; 3°. de Milloué, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 6 November 1891; 4°. L. DELISLE, Directeur van de Bibliothèque nationale te Parijs, 9 November 1891; 5°. den Secretaris van de Académie de Médecine te Parijs, 10 November 1891; 6°. J. DENIKER, Bibliothecaris van het Muséum d'Histoire naturelle te Parijs, 12 November 1891; 7°. CH. SCHEFFER te Parijs, 6 November 1891; 8°. CH.

Hermite te Parijs, 6 November 1891; 9°. V. Duruy te Parijs, 8 November 1891; 10°. den Secretaris van de Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres te Toulouse, 7 November 1891; 11°. T. J. Stieltjes te Toulouse, 6 November 1891; 12°. A. Durieux, Secretaris van de Société d'Emulation te Cambrai, 18 November 1891; 13°. L. J. Léger, Secretaris van de Société Linnéenne de Normandie te Caen, 9 November 1891; 14°. J. Le Jeune, Secretaris van de Académie de Stanislas te Nancy, 7 November 1891; 15°. Hecht, Secretaris van de Société des Sciences te Nancy, 11 November 1891; 16°. A. Perrin, Bibliothecaris van de Académie des Sciences, belles Lettres et Arts- de Savoie te Chambéry, 7 November 1891; 17°. den Secretaris van het Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg te Rostock, 31 October 1891; 18°. den Bibliothecaris van de Societá Italiana delle Scienze te Rome, 2 November 1891; 19°. S. P. Langley, Secretaris van de Smithsonian Institution te Washington, 5 November 1891; 20°. den Directeur van het Bureau of Education te Washington, 10 November 1891; 21°. H. Paul, Bibliothecaris van het U. S. naval Observatory te Washington, 10 November 1891; 22°. J. S. Billings, Bibliothecaris van het Surgeon Generals Office U. S. Army te Washington, 13 November 1891; 23°. H. Phillips jr., Secretaris van de American philosophical Society te Philadelphia, 11 November 1891; 24°. M. Dewey, Secretaris van de State Library te Albany, 11 November 1891; 25°. Th. L. Montgomery, Bibliothecaris van het Wagner free Institute of Science te Philadelphia, 10 November 1891; 26°. N. Murray, Secretaris van de Johns Hopkins University te Baltimore, 12 November 1891; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 21 November 1891; 2°. P. L. Sclater, Secretaris van de zoological Society te Londen, November 1891; 3°. G. Limpricht, Bibliothecaris van de schlesische Gesellschaft

für vaterländische Cultur te Breslau, 20 Juli 1891; 4°. den Secretaris van het naturwissenschaftliche Verein für Schleswig-Holstein te Kiel, 20 October 1891; 5°. G. RADDE te Tiflis, 17 November 1891; 6°. I. F. BUDE, Bibliothecaris van de public Library te Melbourne, 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. een brief van den hoogleeraar VON HELMHOLTZ, waarin der Afdeeling dank wordt gezegd voor haar adres bij gelegenheid van het onlangs door hem gevierde verjaarfeest;

2°. een brief van den Heer A. MAYER, Hoogleeraar-Directeur van het Proefstation der Rijkslandbouwschool te Wageningen, ter begeleiding van een opstel: »Over de intensiteit der ademhaling van de in de schaduw groeiende planten", 't welk hij in de werken der Akademie wenscht opgenomen te zien. Tot rapporteurs over dien arbeid worden door den Voorzitter aangewezen de Heeren BEIJERINCK en SURINGAR.

3°. het bericht van den Heer J. A. C. OUDEMANS, dat hij verhinderd is ter vergadering te verschijnen.

— De Heer LORENTZ brengt, ook uit naam van de Heeren KAPTEIJN en BAKHUIS ROOZEBOOM, rapport uit over de verhandeling van den Heer J. BRESTER AZN.: »Principes astrochimiques, première partie: Théorie du Soleil". Ofschoon heeren rapporteurs moeten verklaren, dat in de verhandeling veel voorkomt, dat zij niet zouden wenschen te onderschrijven en voor rekening van den Heer BRESTER moeten laten; dat een groot gebrek der voorgestelde theorie hierin bestaat, dat zij van de bolvormige photospheer geene betere verklaring weet te geven; dat de schrijver te groot gewicht hecht aan de spectroscopische waarnemingen van CREW; dat de moeilijkheden bij de verklaring van de verschuiving der lijnen in het spectrum van sommige protuberancen door den schrijver te licht worden geteld; dat de theorie der dissociatieverschijnselen geen recht geeft tot de meening

dat bij de zoogenaamde warmte-erupties de temperatuur volkomen onveranderd zou blijven; eindelijk, dat de verklaringen, van de beweging der vlekken en van de periodiciteit der verschijnselen gegeven, aan gegronde bedenkingen onderhevig zijn — wordt toch tot het opnemen van de verhandeling in de werken der Akademie geadviseerd, omdat daarin twee gewichtige vragen behandeld worden, nl.: of op de zon al of niet heftige bewegingen plaats hebben en of de uitkomsten van het onderzoek der dissociatie aan de verklaring van astronomische verschijnselen kunnen worden dienstbaar gemaakt. Eene verdere bespreking van deze vragen achten Heeren rapporteurs in het belang der wetenschap. Het publiceeren der verhandeling van den Heer Brester kan daartoe bijdragen.

Heeren rapporteurs meenen echter, dat niet tot het drukken van de verhandeling kan worden overgegaan, dan nadat de schrijver in de gelegenheid is gesteld, de wijzigingen aan te brengen, waartoe hunne opmerkingen hem wellicht aanleiding geven. Eene conditio sine qua non is verder, dat de schrijver het eerste gedeelte van den door hem gekozen titel weglaat en dien terugbrengt tot het eenvoudige »Théorie du Soleil", omdat Heeren rapporteurs het beginsel afkeuren, dat de Akademie een gedeelte eener verhandeling in hare werken opneemt.

Het rapport wordt zonder discussie goedgekeurd.

— Het rapport van de Heeren Rauwenhoff en Moll over de verhandeling van den Heer van Wisselingh luidt gunstig. — Wordt besloten haar voor de werken der Akademie te bestemmen.

— De Heer Bierens de Haan deelt mede, dat het 4de deel van Huyghens correspondentie weldra het licht zal zien en geeft daarna een overzicht van een kleinen bundel bescheiden, die als 5de rapport der Huyghens-Commissie ter perse gelegd kan worden.

— De Heer Schoute biedt voor de werken der Akademie

aan een opstel van den Heer Dr. J. L. SIRKS, Rector van het Gymnasium te Groningen: »Over den invloed van de buiging door een rooster met vierkante openingen, geplaatst voor een kijker, op de helderheid van het hoofdbeeld eener ster". De door den schrijver gevonden uitkomst luidt: »Indien de oppervlakte van de gezamenlijke openingen in den rooster tot die van de opening van den kijker staat als 1 tot n, dan bedraagt de lichtverzwakking n^2." — De Heeren LORENTZ en VAN DE SANDE BAKHUYZEN zullen daarover in de December-vergadering rapporteeren".

— De Heer PEKELHARING biedt, uit zijn naam en dien van den Heer ENGELMANN, voor de bibliotheek een nieuw stuk aan van »Onderzoekingen gedaan in het physiologisch laboratorium te Utrecht".

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN DEN HEER

J BRESTER Azn.:

»PRINCIPES ASTROCHIMIQUES; 1e PARTIE. THÉORIE DU SOLEIL".

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 November 1891).

De verhandeling van den Heer BRESTER, waarover ons werd opgedragen een verslag uit te brengen, is de vrucht van jarenlang nadenken en van eene ijverige studie van hetgeen over de zon geschreven is. De schrijver heeft daardoor de overtuiging verkregen dat één van de vrij algemeen aangenomen denkbeelden aangaande het wezen van dit hemellichaam, de voorstelling n.l. dat het 't tooneel zou zijn van zeer snelle verplaatsingen van stofmassa's, verworpen moet worden. Daartegenover plaatst hij aanstonds als eerste grondbeginsel zijner theorie het volgende:

»Tous les corps incandescents célestes sont tranquilles en eux-mêmes, et leur calme intérieur est tel, que leurs molécules différemment lourdes, triées par la gravitation en sphères concentriques ne perdent jamais leur stratification".

Om nu te verklaren hoe, ondanks deze rust, toch tal van plaatselijke veranderingen kunnen voorkomen, wordt een tweede beginsel te hulp geroepen dat aldus luidt:

»Le refroidissement continu des astres, en causant dans leurs couches extérieures une transformation intermittente de l'énergie chimique en chaleur, produit dans ces couches des éruptions de chaleur périodiques".

Dit beginsel is niet nieuw; het werd reeds door LOHSE op z. g. nieuwe sterren toegepast en later heeft, onafhan-

kelijk van dezen sterrenkundige, de Heer BRESTER zelf zich ervan bediend in eene theorie der veranderlijke sterren en in het eerste ontwerp zijner zonstheorie. Eene stelselmatige toepassing op alle verschijnselen, die de zon ons aanbiedt, wordt thans evenwel voor het eerst beproefd.

Het is niet wel mogelijk, in korte trekken de beschouwingen weer te geven, die de schrijver tot staving en toelichting zijner beide principes aanvoert, en evenmin kunnen wij uitweiden over de verklaringen, die van de bijzondere verschijnselen : de protuberancen, de vlekken, de fakkels, de corona, enz.. gegeven worden. Veel komt daarin voor, dat wij niet zouden kunnen onderschrijven en dat wij geheel voor rekening van Dr. BRESTER moeten laten. Trouwens, bij een onderwerp als dit is niets natuurlijker dan deze verschillen in meening; noch waarnemingen, noch wiskundige redeneeringen of berekeningen worden ons aangeboden, maar bespiegelingen over zeer ingewikkelde en weinig toegankelijke verschijnselen. Wij hebben de gelegenheid gehad, met den Heer BRESTER de punten te bespreken waaromtrent wij zijne meening niet deelden en behoeven thans niet op dit alles terug te komen. Toch achten wij het noodig, op eenige hoofdzaken de aandacht te vestigen.

Een groot gebrek der voorgestelde theorie zien wij hierin dat zij van de bolvormige gedaante der photospheer geene betere verklaring weet te geven; deze wolkenlaag wordt nl. ondersteld te zweven in eene gasmassa die zelve sterk afgeplat is.

In de tweede plaats komt het ons voor dat de schrijver een te groot gewicht hecht aan de spectroscopische waarnemingen van CREW, waaruit hij afleidt dat op ongeveer 11° breedte de rotatiesnelheid der photospheer gelijk is aan die van de daarboven liggende gaslagen; de vraag rijst hier, of werkelijk voor de breedte waarbij deze gelijkheid bestaat en die in de verdere theorie eene belangrijke rol speelt, uit CREW's waarnemingen eene eenigszins betrouwbare waarde kan worden verkregen.

Ten derde wijzen wij er op dat de verschuiving der lijnen

in het spectrum van sommige protuberancen in de verhandeling niet aan eene verplaatsing der lichtende stof, maar aan eene uitbreiding van een gloeiingsverschijnsel wordt toegeschreven. De aan deze opvatting verbonden moeilijkheden worden door ons niet zoo licht geteld als de Heer Brester blijkbaar doet, wanneer hij zegt dat de door hem verdedigde verklaring zelfs beter gelukt dan de gebruikelijke.

Wij moeten ook nog opmerken dat de theorie der dissociatie-verschijnselen o. i. geen recht geeft tot de meening, dat bij de zoogenaamde warmteërupties de temperatuur volkomen onveranderd zou blijven, hoewel wij toegeven dat de werkingen, die volgens den schrijver de temperatuur constant houden, hare veranderingen kleiner zullen maken dan zij anders zouden zijn. Waar nu eens gesproken wordt van geene merkbare en dan eens van in 't geheel geene temperatuurverandering, houden wij de eerste uitdrukkingswijze voor gelukkiger dan de tweede.

Eindelijk zijn, naar wij meenen, de verklaringen, die van de beweging der vlekken en van de periodiciteit der verschijnselen gegeven worden, aan gegronde bedenkingen onderhevig.

Met dat al meenen wij U te moeten voorstellen, de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen. Twee gewichtige vragen toch worden daarin uitvoerig besproken, de vraag nl. of al dan niet op de zon zeer heftige bewegingen plaats hebben, en de niet minder belangrijke, of de uitkomsten van het onderzoek der dissociatie aan de verklaring van astronomische verschijnselen kunnen worden dienstbaar gemaakt. Verdere bespreking dezer vragen achten wij in het belang der wetenschap, en die kan door het publiceeren van deze verhandeling worden uitgelokt.

Alvorens hiertoe wordt overgegaan, is het wenschelijk dat de schrijver in de gelegenheid wordt gesteld, de wijzigingen aan te brengen waartoe onze opmerkingen hem wellicht aanleiding geven, en noodzakelijk dat hij den titel verandert. Dit laatste, omdat het naar ons oordeel in beginsel

verkeerd is dat de Akademie een *gedeelte* eener verhandeling in hare werken opneemt, zooals hier blijkens den titel het geval zou zijn. Bovendien wenschen wij den Heer BRESTER te vragen, of de schets, die hij van zijne kometentheorie geeft, in dit stuk wel op hare plaats is. Die schets is zoo kort, dat de bezwaren waartoe zijne nieuwe opvatting aanleiding geeft niet voldoende besproken kunnen worden; daarom betwijfelen wij het, of door het inlasschen ervan de waarde der verhandeling is verhoogd.

De beslissing over dit punt blijve evenwel aan den schrijver overgelaten.

J. C. KAPTEYN.
H. A. LORENTZ.
H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN DEN HEER

C. VAN WISSELINGH:

»OVER DE KURKLAMEL EN HET SUBERINE".

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 November 1891).

Aangaande de in hunne handen gestelde verhandeling van den Heer C. VAN WISSELINGH te Steenwijk, getiteld: »Over de kurklamel en het suberine'', hebben de ondergeteekenden de eer het volgende aan de Afdeeling te berichten.

De schrijver, aan de Akademie reeds bekend door zijn verdienstelijk opstel »Over de kernscheede bij de wortels der phanerogamen'', opgenomen in de *Verslagen en Mededeelingen*, Afdeeling Natuurkunde, 3de Reeks, Deel I (1884), heeft in de bovengenoemde verhandeling getracht, onze kennis van de chemische geaardheid der kurklamel in de kurkcellen tot klaarheid te brengen, en opheldering te geven van de tegenstrijdige uitkomsten van vroegere onderzoekers.

Volgens de tegenwoordig gangbare voorstelling, vooral na de onderzoekingen van VON HÖHNEL in 1877, bestaat de wand der kurkcellen uit drie verschillende gedeelten, n.l. den cellulosewand (Celluloseschlauch), de kurklamel (Suberinlamelle) en de middenlamel (Mittellamelle). De eerstgenoemde wand is de meest inwendig gelegene, die aan het lumen der cel grenst; daaromheen bevindt zich de kurklamel, terwijl deze weder omgeven wordt door de middenlamel, welke aan twee aan elkander grenzende cellen gemeenschappelijk toebehoort.

Ten opzichte van den scheikundigen aard der kurklamel

nu heerscht groot verschil van meening. VON HÖHNEL beweert, dat zij bestaat uit cellulose en suberine, die beide overal nevens elkander voorkomen. Suberine is, volgens hem, een eigen celwandstof, ongeveer het midden houdende tusschen cellulose en was, en vooral gekenmerkt door de verhouding tegenover kaliloog en salpeterzuur. Wanneer de kurklamel met geconcentreerde kaliloog bij verwarming wordt behandeld, ondergaat het suberine eene soort van verzeeping, en men verkrijgt ten slotte na koking korrelige ballen, omgeven door hulsels als gevouwen membranen, welke laatste met SCHULTZE's reagens violetkleurig worden, en daarom door VON HÖHNEL als cellulose worden beschouwd.

Eene nadere studie van den kurkwand, bepaaldelijk van Quercus Suber, maakte KÜGLER, wien het gelukte met alcoholische kaliloog onder inwerking van warmte al het suberine aan het kurkweefsel te onttrekken. De in oplossing verkregen stof bleek te bestaan uit glycerine, stearinezuur en een nog onbekend, maar door hem nader onderzocht zuur, dat hij *phellonzuur* heeft genoemd. Hij besluit hieruit, dat suberine is een vet in den waren zin van het woord, maar dat in de kurklamel niet smeltbaar is, omdat zijne moleculen door de cellulose-moleculen worden omhuld.

Ook de Heer VAN WISSELINGH heeft zich reeds vroeger met dit onderwerp bezig gehouden, en de uitkomsten daarvan bekend gemaakt in eene verhandeling in 1887 in de Archives Néerlandaises verschenen. Door eene nieuwe methode van onderzoek, n.l. door verwarming der doorsneden in glycerine, in gesloten buisjes, tot temperaturen van 230° à 290° C., mocht het hem gelukken het bewijs te leveren, dat in de kurklamel geen cellulose-basis voorkomt. Het suberine beschouwde hij, op grond der reactiën die het bij onderscheiden planten vertoont, als uit verschillende chemische stoffen opgebouwd. Door omstandigheden was VAN WISSELINGH echter genoodzaakt zijn onderzoek te staken, niettegenstaande onderscheiden vragen nog op antwoord wachtten. Toen hij in 1890 zich weder daaraan kon wijden, was inmiddels eene studie van GILSON verschenen, die van WISSELINGH's (van VON HÖHNEL afwijkend) resultaat be-

vestigde, dat in de kurklamel geen cellulose voorkomt, en die aanwees dat de violetkleuring met chloorzinkjood moet toegeschreven worden aan de aanwezigheid van phellonzuur kalium.

Daarop heeft nu de Heer VAN WISSELINGH een nieuw en meer uitgebreid onderzoek ingesteld, waaraan de thans aan de Akademie aangeboden verhandeling haar ontstaan te danken heeft. Na eene korte inleiding, geeft hij in deze een historisch overzicht der questie, aan het slot waarvan hij het doel van zijn onderzoek als volgt omschrijft:

1°. Onderzoek naar de chemische geaardheid der kurklamel, met behulp van reagentia en door middel der verwarmingsmethode met glycerine, en zoo mogelijk afzondering van in de kurklamel aanwezige stoffen.

2°. Beantwoording der vraag: kunnen in de kurklamel smeltbare vetten aanwezig zijn? Zoo ja, wat is dan de oorzaak dat bij verwarming in glycerine geen smelting wordt waargenomen en de behandeling met oplosmiddelen voor vetten van weinig of geen invloed is op de kurklamel?

3°. Verklaring van verschillende verschijnsels onder den mikroskoop waargenomen bij behandeling der kurklamel met reagentia, bijv. de door VON HÖHNEL waargenomen violetkleuring, de vorming van hulsels bij de kalireactie en andere tot heden nog niet op afdoende wijze verklaarde verschijnsels.

Hiertoe heeft hij vooreerst zijne vroegere onderzoekingen met gedeeltelijk andere, gedeeltelijk dezelfde planten herhaald en bevestigd gezien. Bovendien heeft hij nog op twee andere wijzen, namelijk door maceratie in tienprocentische alcoholische kaliloog en door verwarming met een tienprocentische oplossing van kaliumhydroxyde in glycerine, hetzelfde resultaat verkregen, dat cellulose in de kurklamel niet voorkomt. Ook gelukte het de uitkomst te bevestigen, dat de zoogenaamde hulsels, uit de kurklamel afgezonderd en door VON HÖHNEL om de violetkleuring als cellulose-lamellen beschreven, niet anders zijn dan verzeepingsproducten en in de eerste plaats bestaan uit kaliumphellonaat.

Ten opzichte van de samenstelling van het suberine komt

van Wisselingh langs twee nieuwe wegen, n.l. door langdurige maceratie in kaliloog van 50 pCt. en verwarming in glycerine tot 130^{0}, en ten tweede door verwarming in eene tienprocentische oplossing van kaliumhydroxyde in glycerine, tot het besluit dat suberine, in verschillende wijzigingen bij onderscheiden planten voorkomende, te beschouwen is als samengesteld uit vetten of daaraan verwante stoffen, en uit één of meer in chloroform onoplosbare, niet smeltbare stoffen.

Dit alles is door den schrijver met groote uitvoerigheid uiteengezet en met goede figuren toegelicht voor de onderscheiden planten, waarop hij zijne proeven heeft genomen, terwijl hij telkens de resultaten, waar zij in bijzonderheden afwijken, met elkander vergelijkt. Het aantal behandelde species is niet groot, maar elke van deze vertegenwoordigt eene voor het onderzoek belangrijke wijziging; zoo dient het kurkweefsel van Quercus Suber als representant van eene dunwandige, dat van Cytisus Laburnum van eene dikwandige soort, zoo is Virgilea lutea gekozen om de fraaie violetkleuring, Pirus Malus om de bijzondere verhouding der kurklamel bij verwarming, Salix caprea om het gehalte aan was en het wegblijven der violette verkleuring, enz.

In één woord, de ondergeteekenden hebben bij de lezing der verhandeling van den Heer van Wisselingh den indruk gekregen van een wetenschappelijk stuk, waarin omstandig eene reeks van nauwkeurige proeven beschreven is, en dat getuigt, hoe door den schrijver een eigen weg is ingeslagen, om zich een zelfstandig oordeel te vormen. Zij beschouwen de verhandeling als eene verdienstelijke bijdrage tot vermeerdering onzer kennis van den celwand, en zij stellen aan de Afdeeling voor, haar onder de werken der Akademie op te nemen.

Utrecht en *Groningen*,
November 1891.

N. W. P. RAUWENHOFF.
J. W. MOLL.

VIJFDE RAPPORT

VAN DE

HUYGENS-COMMISSIE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 November 1891).

Ten vervolge op en in aansluiting aan het Vierde Rapport der HUYGENS-Commissie (uitgebracht in de Vergadering van 25 Mei 1889), mogen, nu het Tome IV van de *Correspondance de* CHR. HUYGENS binnen kort het licht zal zien, over dezen arbeid eenige gegevens volgen.

Het derde Deel liep over het tijdvak 1660 en 1661, en hield 245 brieven, en nog 24 in het Supplement; het vierde Deel liep over de jaren 1662 en 1663, en hield 250 brieven, benevens nog 5 in het Supplement. Aan het vijfde Deel zijn wij begonnen; het zal de jaren 1664 en 1665 moeten bevatten.

De Deelen III en IV bevatten dus te zamen 495 brieven en 29 in de Supplementen: de beide eerste Deelen bevatten 702 brieven en 38 in de Supplementen. Dit geeft voor de vier eerste Deelen 1197 brieven en 67 in de Supplementen; dus 1264 brieven in het geheel.

Evenals vroeger, volge nu de lijst der personen in deze *Correspondance*, die aan HUYGENS geschreven hebben, of waaraan door HUYGENS geschreven is. Behalve deze komen er in Deel III nog 63 brieven, en in Deel IV 29 brieven voor, die niet tot de vorige behooren: dus te zamen 92. Dit maakt met de 110 der beide eerste deelen 202 brieven, die niet aan HUYGENS gericht, of door hem geschreven zijn. Dat deze brieven, ook waar zij van buiten onze verzamelingen stammen, van groot gewicht plegen te zijn bij de gewone briefwisseling, zal den lezer wel duidelijk gebleken zijn.

De nu volgende tabellen zijn op dezelfde wijze ingericht als in het Vierde Rapport: de tweede kolom bevat de namen der personen, de derde het aantal brieven door HUYGENS aan hen, de vierde kolom het aantal, door hen aan HUYGENS geschreven. Wanneer bij iemand beide deze kolommen waren ingevuld, dan is het cijfer dezer briefwisseling opgemaakt, door de cijfers dier beide kolommen op te tellen: men vindt ze in de eerste kolom.

Op die wijze is Tabel I voor Tome III, en Tabel II voor Tome IV opgemaakt, terwijl hetzelfde gedaan is voor de Deelen I—IV gezamenlijk in de Tabel III. Terloops zij nog opgemerkt, dat in Tabel III de eerste kolom soms kon ingevuld worden, waar dit in de vorige niet mogelijk was, en wel in het geval, dat de derde en vierde kolommen uit verschillende deelen over te nemen waren. Omgekeerd echter kan in de laatste regel van Tabel III de eerste kolom niet uit de derde en vierde ingevuld worden, omdat het hier verschillende personen geldt.

TABEL I. TOME III.

Briefwisseling.		van H.	aan H.
	A. Boddens		1
23	Ism. Boulliau.	10	13
	R. Boyle		1
	C. Brunetti		4
	H. Bruno		2
	J. Buot		1
5	P. de Carcavy	3	2
	A. Cellarius	1	
	Chanut.		1
19	J. Chapelain	5	14
	A. Colvius		1
	C. Dati	1	
	Ph. Doublet		3
	P. de Fermat.		2
	B. de Frenicle de Bessy		2
4	du Gast	1	3
51		21	50

Briefwisseling.		van H.	aan H.
51		21	50
4	Gregorius à St. Vincentio. . . .	1	3
	P. Guisony		4
10	N. Heinsius	4	6
8	J. Hevelius	4	4
19	Constantyn Huygens, frère . . .	9	10
	Lodewijk Huygens	12	
	G. A. Kinner à Löwenthurn. . .		1
10	Leopoldo de Medicis	5	5
21	R. Moray	6	15
	Cl. Mylon.		1
	M. A. Neuraeus.		1
	H. Oldenburg.		2
	Marianne Petit	1	
	P. Petit		2
	J. Reeves		2
3	D. Rembrandtsz van Nierop. . .	2	1
	M. A. Ricci	1	
	C. C. Rumphius.	1	
6	Fr. van Schooten	4	2
	G. Schott		1
	R. F. de Sluse		3
	R. Southwell		1
3	H. Stevin	1	2
3	A. Tacquet . . . . . . , . . .	2	1
10	M. Thevenot	5	5
	J. van Vliet		1
3	J. Wallis . . . . ,	2	1
	?		1
151		81	125

TABEL II. TOME IV.

Briefwisseling.		van H.	aan H.
	A. Auzout.		1
3	Ism. Boulliau.	1	2
	W. Brereton		1
3		1	4

Briefwisseling.		van H.	aan H.
3		1	4
	W. Brouncker		3
	A. Bruce		3
	P. de Carcavy		2
9	J. Chapelain	2	7
	V. Conrart		1
	Ph. Doublet		3
	P. van der Faes		1
	P. de Fermat.		1
	G. van Gutschoven		1
10	N. Heinsius	4	6
4	J. Hevelius	1	3
	Th. Hobbes	2	
40	Constantyn Huygens, frère . . .	24	16
62	Lodewijk Huygens	61	1
	Susanna Huygens		1
2	Leopoldo de Medicis	1	1
	H. L. H. de Monmor		3
37	R. Moray	18	19
	H. Oldenburg.		1
10	P. Petit	2	8
4	Is. de la Peyrère	1	3
	M. A. Ricci		1
8	R. F. de Sluse	1	7
	S. de Sorbière		1
5	M. Thevenot	1	4
	J. van Vliet		3
	J. de Witt	2	
	?		1
194		121	105

Tabel III. Tome I—IV.

Briefwisseling.		van H.	aan H.
	M. H. van Andel	1	
	A. Auzout		1
	Fr. Aynscom	1	
		2	1

Briefwisseling.		van H.	aan H.
		2	1
	D. van Baerle	1	
3	E. Bartholin	1	2
6	Ch. Bellair . . . . , .	2	4
	A. de Bie	2	
4	A. Boddens	1	3
76	Ism. Boulliau	30	46
	R. Boyle		1
	W. Brereton		4
	W. Brouncker		3
	A. Bruce		3
6	C. Brunetti	1	5
12	H. Bruno	4	8
	J. Buot		1
	J. van der Burch	1	
	Calthof.	1	
23	P. de Carcavy	11	12
	A Cellarius	1	
2	A. C. de Chambonnière	1	1
	Chanut.		1
55	J. Chapelain	17	38
11	A. Colvius.	5	6
	N. Colvius.		1
2	B. Conradus	1	1
	V. Conrart		3
	L. van Coppenol.	1	
	S. Coster		1
	C. Dati.	1	
	Ph. Doublet		6
	A. Duyck	1	
	J. Elsevier.	1	
2	Etats-Généraux	1	1
	Etats de Hollande et de West-Frise.	1	
	P. van der Faes.		1
	P. de Fermat.		3
	B. de Frenicle de Bessy		2
202		88	158

Briefwisseling.		van H.	aan H.
202		88	158
7	du Gast	2	5
	Th. Gobert	1	
	J. Golius	2	
31	Gregorius à St. Vincentio. . . .	15	16
	P. Guisony		4
10	G. van Gutschoven	6	4
22	N. Heinsius	9	13
2	G. Hesius.	1	1
	H. van Heuraet		2
22	J. Hevelius	10	12
	Th. Hobbes	2	
2	G. B. Hodierna	1	1
2	J. Hudde	1	1
14	Constantyn Huygens, père . . .	8	6
103	Constantyn Huygens, frère . . .	58	45
81	Lodewijk Huygens	80	1
	Philips Huygens.		2
	Susanna Huygens		2
	S. C. Kechelius à Hollenstein . .	1	
23	G. A. Kinner à Löwenthurn. . .	10	13
	D. van Leyden van Leeuwen. . .	1	
5	D. Lipstorp	3	2
13	Leopoldo de Medicis	7	6
18	M. Mersenne	8	10
	T. B. Mocchi	2	
4	H. L. H. de Monmor	1	3
	H. du Mont	1	
58	R. Moray	24	34
23	Cl. Mylon.	8	15
	M. A. Neuraeus.		1
	Lady Newcastle		1
	H. Oldenburg.		3
	Chr. Otter.		1
4	R. Paget	1	3
6	Bl. Pascal.	1	5
652		352	370

Briefwisseling.		van H.	aan H.
652		352	370
	Marianne Petit	1	
21	P. Petit	4	17
4	Is. de la Peyrère	1	3
	W. Pieck	1	
	J. Reeves		2
6	D. Rembrandtsz van Nierop	4	2
	Mlle van Renesse	1	
2	M. A. Ricci	1	1
10	G. P. de Roberval	6	4
	C. C. Rumphius	1	
3	A. A. de Sarasa	2	1
118	Fr. van Schooten	63	55
	G. Schott		1
	D. Seghers	6	
78	R. F. de Sluse	24	54
	S. de Sorbière		1
	R. Southwell		1
	J. Stampioen		1
3	H. Stevin	1	2
12	A. Tacquet	6	6
	Tassin	2	
15	M. Thevenot	6	9
8	J. van Vliet	1	7
	J. de Vogelaer	1	
	J. van Vondel		2
23	J. Wallis	11	12
	J. Wiesel		3
4	J. de Witt	2	2
	J. de Wijck		1
	son Cousin	1	
	Mlle	1	
	?	4	2
959		503	559

En nu kunnen wij ook gemakkelijk een overzicht geven van de wederzijds niet-beantwoorde brieven, alsmede van het

aantal personen, met wie HUYGENS in briefwisseling stond.

TOME III.

Brieven . . .	245	A. van HUYGENS	81	brieven.
Supplement .	24	B. aan HUYGENS	125	»
		C. buiten HUYGENS om .	63	»
	269		269	brieven.

Personen:

A. aan 22 personen, in briefwisseling 16, niet beantwoord 6.
B. van 37 » » » 16, » » 21.

aantal personen 22 + 37—16 = 43 = 16 + 6 + 21.

Brieven:

A. 75 + niet beantwoord 6
B. 87 + » » 38

162 + niet beantwoord 44 = 206 = 81 + 125.

TOME IV.

Brieven . . .	250	A. van HUYGENS	121	brieven.
Supplement .	5	B. aan HUYGENS	105	»
		C. buiten HUYGENS om .	29	»
	255		255	brieven.

Personen:

A. aan 14 personen, in briefwisseling 12, niet beantwoord 2.
B. van 29 » » » 12, » » 17.

aantal personen 14 + 29—12 = 31 = 12 + 2 + 17.

Brieven:

A. 117 + niet beantwoord 4
B. 77 + » » 28

194 + niet beantwoord 32 = 226 = 121 + 105

Doen wij nog hetzelfde voor de vier deelen te zamen, dan komen wij, met behulp van Tabel III tot de volgende uitkomsten.

TOME I—IV.

Brieven	1197
Supplementen	67
	1264

A.	van HUYGENS. . . .	503 = 173 + 128 + 81 + 121 br.
B.	aan HUYGENS. . . .	559 = 148 + 181 + 125 + 105 »
C.	buiten HUYGENS om.	202 = 62 + 48 + 63 + 29 »
		1264 = 383 + 357 + 269 + 255 br.

Personen:

A. aan 78 personen, in briefwisseling 46, niet beantwoord 32.
B. van 77 » » » 46, » » 31.
aantal personen 78 + 77—46 = 109 = 46 + 32 + 31.

Brieven:

A. 462 + niet beantwoord 41
B 501 + » » 58

963 + niet beantwoord 99 = 1062 = 503 + 559.

Ook omtrent verandering in de briefwisseling valt hier het een en ander op te merken. ISM. BOULLIAU, die nog in Deel III 23 wederzijdsche brieven opleverde, vervalt bijna in Deel IV mede wegens het verblijf van HUYGENS in Parijs; hetzelfde is met CHAPELAIN het geval. Daarentegen treedt, om dezelfde reden, de briefwisseling met zijn broeders CONSTANTYN en LODEWIJK, reeds in Deel III, maar vooral in Deel IV op den voorgrond. DE SLUSE wordt hier vervangen door R. MORAY, die met HUYGENS handelt over hetgeen er in Gresham College, later de Royal Society, voorvalt; terwijl daarbij WALLIS bijna geheel wegvalt. Bij PETIT is de briefwisseling grootendeels slechts van diens zijde. THEVENOT komt nu te voorschijn. Met HEINSIUS en HEVELIUS is de briefwisseling tamelijk standvastig; met OLDENBURG is zij aan het begin.

D. BIERENS DE HAAN.
Voorzitter.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 19 December 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, PEKELHARING, KOSTER, MULDER, FORSTER, BIERENS DE HAAN, STOKVIS, MAC GILLAVRY, PLACE, KAPTEYN, VAN DER WAALS, SCHOUTE, KORTEWEG, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, RAUWENHOFF, HOEK, VAN DIESEN, SURINGAR, MICHAËLIS, VAN BEMMELEN, J. A. C. OUDEMANS, HUBRECHT, MOLL, FRANCHIMONT, BEHRENS, LORENTZ, ZEEMAN, BAKHUIS ROOZEBOOM en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden :

1°. MARCHAL, Secretaris van de Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique, 19 Juni 1891; 2°. P. WILLEMS te Leuven, 1 December 1891; 3°. het Ministère du Commerce, de l'Industrie et des Colonies te Parijs, 26 November 1891; 4°. den Secretaris van de Société Dunkerquoise pour l'encouragement des Sciences, des Lettres et des Arts te Duinkerken, 15 December 1891; 5°. R. THALEN, Secretaris van de Société royale des Sciences te Upsala, 1 Augustus 1891; 6°. A. ARRHENIUS, Biblio-

thecaris van de Societas pro Fauna et Flora Fennica te Helsingfors, 3 December 1891; 7°. E. C. PICKERING, Directeur van Harvard-College-Observatory te Cambridge, 10 November 1891; 8°. den Bibliothecaris van de geological and natural History Survey te Sussex, 25 November 1891. Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 3 December 1891; 2°. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, November 1891; 3°. C. C. UHLENBECK, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 26 November 1891; 4°. BAUDRYSLO te Parijs, 12 December 1891; 5°. R THALEN, Secretaris van de Société royale des Sciences te Upsala, 15 Augustus 1891; 6°. A. C. DROLSUM, Bibliothecaris van de Université royale te Christiania, 20 November 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. het bericht van den Heer SCHOLS, dat hij verhinderd is ter vergadering te verschijnen; 2° eene mededeeling van den Heer FRANZ LESSKA, Controleur bij de koninklijk-Hongaarsche Staatssporen, te Debreczin, waaruit zou moeten blijken, dat hij eene methode van integreeren gevonden heeft, waardoor de oplossing van samengestelde problemen mogelijk wordt gemaakt. — Ter visie voor heeren Wiskundigen der Afdeeling.

— De Voorzitter wijdt een woord van warme waardeering aan de nagedachtenis van wijlen het lid der Akademie en van haar Bestuur ABRAHAM KUENEN. Hij herinnert aan het verlies, door de wetenschap in den dood van KUENEN geleden; aan de hoogachting, welke de overledene om zijne kennis en zijn streven op wetenschappelijk gebied niet enkel binnen, maar ook buiten de grenzen van ons vaderland mocht ondervinden; maar ook, en niet het minst, aan de

leegte, welke KUENEN's overlijden in het hart zijner talrijke vrienden achterlaat. Niet enkel als geleerde, maar ook als beminnelijk man, wiens gaven van hoofd en hart tot harmonische ontwikkeling gekomen waren, werd KUENEN, door wie hem van meer nabij hadden leeren kennen, hooggeacht en geëerd. Ook in den beperkter kring van het Bestuur der Akademie wordt het heengaan van ons medelid in hooge mate gevoeld, want aan helderheid, scherpzinnigheid en vaardigheid in het leiden der vergaderingen, paarde KUENEN de gave van het woord, en wist hij te treffen door eenvoud en hartelijkheid.

Met dankbaarheid zullen de leden der Akademie steeds herdenken, wat deze Instelling aan KUENEN verplicht is.

— De Heer VAN BEMMELEN brengt, in naam der Geologische Commissie, verslag uit over den brief, in de October-vergadering ingekomen van het Aardrijkskundig Genootschap. In dit verslag, 't welk de Commissie als antwoord op den brief des Genootschaps beschouwd wenscht te zien, wordt het standpunt, door de Akademie ingenomen omtrent al wat op de Geologie van Nederland betrekking heeft, breedvoerig uiteengezet; de wenschelijkheid betoogd, dat het doen vervaardigen van kaarten door het Rijk worde ondernomen; eindelijk de verklaring uitgesproken, dat de Akademie wel bereid is hulp en raad, maar niet om finantieelen steun te verleenen, omdat zij over geene andere fondsen beschikken kan, dan die voor de belangen der Akademie zélve zijn aangewezen. — Zonder discussie wordt besloten, het rapport der Geol. Commissie te doen strekken als antwoord aan het Aardrijkskundig Genootschap op zijn brief van 22 October.

— De Heer SURINGAR brengt, ook uit naam van den Heer BEYERINCK, verslag uit over het opstel van den Heer ADOLF MAYER: »Over de intensiteit der ademhaling van in de schaduw groeiende planten." — Ofschoon heeren rapporteurs de door den Schrijver uitgesproken stelling: dat de zwakke ademhaling alleen voldoende is om het welig groeien

van schaduwplanten te verklaren — geenszins door hem bewezen achten, en, naar hun oordeel, ook het reductieproces van koolzuur in cijfers had behooren te worden uitgedrukt, liever dan, zooals de Schrijver thans gedaan heeft, de afwezigheid dier cijfers aan te vullen door redeneering en door feiten, aan bouwplanten ontleend; daar verder de door den S. aangenomen overeenstemming tusschen de cijfers, doelende op het productievermogen van eene hektare beukenbosch en eene hectare tarweland, zonder twijfel slechts eene schijnbare is, omdat de Schrijver den bladval verwaarloosde en het verschil in verlies van organische stof door de koolzuur-ademhaling niet in rekening bracht; zoo wenschen zij toch tot de opneming van het opstel in de Verslagen en Mededeelingen te adviseeren, omdat de vragen, door den Heer MAYER te berde gebracht, zoowel voor wetenschap als praktijk gewichtig zijn; omdat de Schrijver getallen ten beste geeft, wier publicatie aanleiding kan geven tot verder onderzoek; omdat, eindelijk, in de Verhandeling menige belangrijke opmerking voorkomt, welke de overweging waard is. De conclusie wordt zonder discussie aangenomen.

— De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM spreekt over den invloed der isomorphie op het gedrag van dubbelzouten tegenover de waterige oplossing hunner componenten.

Spreker heeft dergelijk geval onderzocht bij het stelsel salmiak en ijzerchloried. Hiervan kunnen zoowel mengkristallen in verschillende verhouding, als een dubbelzout van de samenstelling $2\,NH_4Cl.\ FeCl_3.\ H_2O$ optreden.

In verband met des Sprekers vroegere onderzoekingen omtrent het evenwicht van dubbelzouten, zoowel als van isomorphe kristalmengsels tegenover hunne oplossingen, liet zich het volgende verwachten.

Wanneer tusschen eenig stelsel van 2 zouten zoowel een dubbelzout als mengkristallen in wisselende verhouding bestaan, moet bij standvastige temperatuur en standvastigen druk eene zekere samenstelling der oplossing mogelijk zijn, waarbij het dubbelzout en mengkristallen van bepaald gehalte naast elkander kunnen bestaan. Bij overschrijding

van de concentratie der vloeistof in de eene of andere richting, moet het dubbelzout in mengkristallen, of omgekeerd, worden omgezet.

Een en ander vloeit onmiddellijk voort uit de overweging, dat wij bij dergelijke stelsels te doen hebben met evenwichten tusschen 3 stoffen. Naar den regel der phasen zal dan de samenstelling der oplossing veranderlijk zijn zoolang daarnevens slechts ééne vaste phase aanwezig is. Als zoodanig moet zoowel het dubbelzout als mengkristallen worden aangemerkt.

De samenstelling dier oplossing wordt echter volkomen bepaald zoodra *twee* vaste phasen nevens haar optreden. Dit geval doet zich dus zoowel voor wanneer de twee zouten onafhankelijk naast elkander bestaan, als wanneer een dubbelzout met een zijner componenten, of twee dubbelzouten, of twee soorten mengkristallen, of eindelijk dubbelzout met mengkristallen naast elkander kunnen optreden.

De bepaling der isotherme van 15° toonde dat deze verwachtingen volkomen vervuld werden.

Kristallen van $FeCl_3 . 6H_2O$ bleken bestaanbaar naast oplossingen, wier gehalte aan $FeCl_3$ en NH_4Cl, op 100 mol. H_2O, begrepen waren tusschen de grenzen:

$FeCl_3$.	9.3 — 10.08 mol.
NH_4Cl	0 — 1.52 »

Zoodra het gehalte aan NH_4Cl grooter dan 1.52 wordt, treedt dubbelzout op, dat bestaan blijft, wanneer de oplossing varieert tusschen de grenzen:

$FeCl_3$	10.08 — 6.74 mol.
NH_4Cl.	1.52 — 7.81 »

Bij overschrijding der laatste grenzen treden eindelijk mengkristallen op, wier gehalte aan $FeCl_3$ van ± 8 tot 0 pCt. afneemt wanneer de oplossing verandert van:

$FeCl_3$	6.74 — 0 mol.
NH_4Cl.	7.81 — 11.88 »

De isotherme bestaat alzoo uit 3 takken, welke elkander scherp snijden. In de beide snijpunten bestaan naast de oplossing:

dubbelzout met $Fe Cl_3 . 6 H_2 O$
» » mengkristallen.

Bij andere temperaturen zullen deze punten zich verschuiven en evenzoo de samenstelling der grensmengkristallen.

Terwijl de samenstelling der oplossing in het 1ste snijpunt door toevoeging van meer ijzerchloried niet meer veranderen zal, zal de oplossing van het andere snijpunt slechts zoolang onveranderd blijven, totdat door voortgezet toevoegen van salmiak al het dubbelzout in mengkristallen veranderd is.

Dit verschillend gedrag kan in sommige gevallen dienstig zijn om het bestaan van mengkristallen te ontdekken nevens dubbelzouten, en maakt eene herhaling noodig van de meeste proeven van RUDORFF over zouten, die te zamen dubbelzouten vormen.

— De Heer J. A. C. OUDEMANS doet eene mededeeling over het onderzoek van niveaux.

— De Heer C. A. J. A. OUDEMANS biedt eene revisie aan van de tot hiertoe in Nederland gevonden hoogere en lagere Fungi, bewerkt in den trant van den Prodromus Florae Batavae. — Het mygcologische gedeelte van dezen laatsten zag in 1858 het licht en werd in 1866 aangevuld met eene bijlage, door den Belgischen mycoloog WESTENDORP bewerkt uit bouwstoffen, hem door de Vereeniging voor de kennis der Flora van Nederland verstrekt. — Sedert werden door den Spreker 13 bijdragen tot de kennis der Nederl. Fungi in het Kruidkundig Archief in het licht gegeven en de 14e ter perse gelegd. Hij achtte de tijd gekomen, al deze bouwstoffen opnieuw en naar den tegenwoordigen stand der systematische wetenschap te verwerken, en heeft die taak thans volbracht, zoodat tot het ter perse leggen van zijn geschrift kan worden overgegaan.

— Voor de werken der Akademie worden aangeboden: door den Heer VAN BEMMELEN eene Verhandeling van den Heer Dr. H. VAN CAPPELLE: »Over het Diluvium van West-Drenthe;" en door den Heer LORENTZ eene Verhandeling van den Heer A. C. VAN RIJN VAN ALKEMADE: »Toepassing der theorie van GIBBS op evenwichtstoestanden van zoutoplossingen en vloeistofmengsels."

Tot rapporteurs over de eerste verhandeling worden aangewezen de Heeren VAN BEMMELEN en BEHRENS, en over de tweede de Heeren LORENTZ en VAN DER WAALS.

— Voor de Bibliotheek der Akademie worden aangeboden: door den Heer MULDER de dissertatie van den Heer L. E. O. VISSER: »Proeven met een Manokryometer", en door den Heer FRANCHIMONT eene nieuwe aflevering van het Recueil des travaux chimiques dans les Pays-Bas.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

VERSLAG

VAN DE

GEOLOGISCHE COMMISSIE,

OVER DEN

BRIEF VAN HET AARDRIJKSKUNDIG GENOOTSCHAP.

(Gedagteekend 22 Oct. 1891).

Wij hebben de eer aan de Akademie voor te stellen den volgenden brief aan het Aardrijkskundig genootschap toe te zenden, in antwoord op deszelfs schrijven van 22 October l. l.

De Kon. Akademie van W., afd. Natuurkunde, heeft belangstellend kennis genomen van het rondschrijven van 22 October l.l. dat aan haar, evenals aan andere Instellingen en Genootschappen, door U is toegezonden.

Wat betreft de vervaardiging van eene nieuwe geologische kaart van Nederland, de Akademie is ten volle overtuigd dat daaraan groote behoefte bestaat. Ook de vervaardiging van eene Hoogtekaart van Nederland acht zij zeer wenschelijk.

Dat de Akademie bij de Regeering op eene nieuwe bewerking van STARING's kaart aangedrongen, en een plan daartoe heeft aangeboden, is U bekend uit hetgeen daaromtrent gepubliceerd is in de »Verslagen en Mededeelingen van 1888, Deel IV, blz. 39—52.

Toen de Regeering geen gevolg aan die voorstellen gegeven had, maar zich vooreerst bepaald tot het herdrukken der kaart van STARING, heeft de Akademie getracht: eerstens, om zooveel mogelijk te voorkomen, dat verder hetzij materiaal hetzij tijdelijk voorhanden gelegenheden tot geologisch

onderzoek in ons land zouden verloren gaan — en ten tweede om plaatselijk geologisch onderzoek zooveel mogelijk te bevorderen. Zij heeft daartoe den steun der Regeering verzocht in een schrijven dat in deel VI, blz. 367—371 der Versl. en Meded. gepubliceerd is.

Dientengevolge heeft zij verkregen, dat de Ministers van Waterstaat en van Binnenlandsche Zaken haar op de hoogte houden van die Rijkswerken, welke voor de verzameling van geologische gegevens van belang kunnen zijn, zooals: insnijdingen of uitgravingen van den bodem, diepere boringen enz. Zij heeft tevens een jaarlijksch crediet van de Regeering ontvangen ter bestrijding van de reis-, verblijf- en andere kosten, welke verbonden zijn 1e aan het opnemen en onderzoeken van den bodem der insnijdingen en uitgravingen en van de aardmonsters der boringen. 2e aan het onderzoek van de bodem-oppervlakte wanneer zich daartoe eene gunstige gelegenheid opdoet.

Voor dat onderzoek heeft de Akademie, door bemiddeling van eene Commissie uit haar midden, de medewerking ingeroepen van Nederlandsche geologen, Dr. J, Lorié, Dr. G. A. T. Molengraaff, Dr H van Cappelle, Prof. F J. P. van Calker, Dr. J. L. C. Schroeder van der Kolk, welke Heeren haar die medewerking toegezegd, en ten deele reeds ijverig verleend hebben. Na gehouden onderling overleg, hebben Dr. Lorié, Dr. van Cappelle en Dr. Schroeder v. d. Kolk zoowel in 1890 als in 1891 zich bezig gehouden:

1e met het onderzoek van monsters uit boringen verkregen, 2e met het plaatselijk onderzoek van bodemdoorsneden langs het nieuw gegraven Merwedekanaal, den Nieuwen Maasmond enz. enz. 3e met het geologisch veldonderzoek en het karteeren van verschillende gedeelten van ons Alluvium en Diluvium in Drenthe, Overijssel, Noord-Brabant en Limburg.

Korte Verslagen van die onderzoekingen heeft de Academie reeds gepubliceerd of zal zij eerstdaags in het licht geven.

De meer uitvoerige verhandelingen worden door die Heeren in verschillende tijdschriften gepubliceerd.

Bovendien zijn eenige afschriften van de waarnemingen en uitkomsten van boringen uit den laatsten tijd verzameld, en tracht de Akademie zich ook op de hoogte te houden van de particuliere werken, die gegevens voor de samenstelling des bodems kunnen opleveren.

De Akademie wenscht op dien weg voort te gaan. Indien het aantal van grondwerken, die voor Geologisch onderzoek van belang zijn, zulks noodig maakt, of indien de gelegenheden tot veldonderzoek door nog ruimere medewerking onzer Geologen toenemen, dan zal zij aan de Regeering eene verhooging van bovenvermeld crediet aanvragen.

Wanneer intusschen uw Genootschap, wellicht in samenwerking met andere Genootschappen, evenzoo het vernieuwd onderzoek van Nederlands bodem — in den zin zooals in Dr. LORIÉ's verslag op blz. 4—7 sub 1—6 is omschreven, en waartoe zijne lijst van leemten en onzekerheden een uitmuntende leiddraad zal zijn — wil bevorderen en geldelijk ondersteunen, dan draagt zulks geheel de sympathie der Akademie weg. Dat alles immers zal van groot belang zijn ter voorbereiding van de nieuwe geologische kaart en van eene hoogtekaart.

Wat nu de vervaardiging dier kaarten aangaat, de Akademie blijft met U van oordeel dat zulks eene Rijkszaak is, van wege de daaraan verbonden kosten. Mocht daarop door Uw Genootschap bij de Regeering worden aangedrongen, en mochten voorstellen tot uitvoering of aanbiedingen van geldelijke bijdragen daarbij worden gevoegd, de Akademie zal die — behoudens nader onderzoek — zooveel zij vermag steunen, zoodra de Regeering haren raad daaromtrent inroept. Zij zal ook van hare zijde bij de Regeering aanhouden, dat deze de vervaardiging der kaart ter hand neme. Zelve kan zij U geen geldelijken steun toezeggen, omdat zij over geene andere gelden te beschikken heeft, dan die haar door de Regeering worden toegelegd voor bepaalde werkzaamheden, door hare leden zelve of onder hare leiding of beheer uit te voeren.

Uit dit alles moge het U blijken, dat de Akademie in

de door U gewenschte richting reeds werkzaam is, en werkzaam zal blijven, zoowel om eene nieuwe Geologische kaart van Nederland voor te bereiden als om de uitvoering daarvan van Rijkswege te bevorderen. Hiermede meent zij uwe vraag: op welke wijze zij tot medewerking in staat is: voldoende beantwoord te hebben.

J. M. VAN BEMMELEN.

TH. H. BEHRENS.

G. VAN DIESEN.

A. W. VAN RIEMSDIJK.

RAPPORT

AANGAANDE EENE VERHANDELING VAN DEN HEER

ADOLF MAYER,

WELKE TOT TITEL DRAAGT:

„OVER DE INTENSITEIT DER ADEMHALING VAN IN DE SCHADUW GROEIENDE PLANTEN."



De schrijver dezer verhandeling tracht te bewijzen, dat het vermogen der schaduwplanten om bij betrekkelijk geringe lichtintensiteit te kunnen leven, niet moet worden toegeschreven aan een sterkere koolzuurreductie dan bij de zonplanten, maar wel aan een zwakkere ademhalingsintensiteit, waardoor ook een geringere productie van brandbare zelfstandigheid bij de schaduwplanten dan bij de zonplanten, aan de geringere eischen der voeding van de eerste in vergelijking met de laatste, zou kunnen voldoen. Reductie- en oxydatie-processen zouden dus, naar zijne opvatting, bij schaduwplanten beide met geringere energie plaats vinden dan bij zonplanten. Het geheele experimenteele gedeelte van de verhandeling heeft betrekking op de zuurstofabsorptie en voert den schrijver, ten dien aanzien, tot het genoemde resultaat.

De proeven welke hij aanvoert tot staving van zijne hoofdstelling, volgens welke de ademhalingsenergie der schaduwplanten geringer is dan die der zonplanten, komen op het volgende neer.

De ademhaling wordt gemeten met behulp van het door den schrijver, in gemeenschap met Wolkoff, geconstrueerde ademhalingsapparaat, beschreven in de »Landwirthschaftliche Jahrbücher" 1874, Bd. 3, pag. 481.

De schrijver vindt, dat bij de temperatuur van 14° C, bij drie roggebladen van gemiddelde afmeting, van een gezamenlijk vol. van 0,6 cM^3, en bevattende 104 mG. droge stof, op 10 en 11 Juni het zuurstofverbruik per uur bedroeg 0.1 cM^3 dat is ± 1.0 cM^3 per gram droge stof.

Bij de schaduwplanten daarentegen, was dit getal als volgt. Bij Phalangium viviparum 0.3 cM^3; bij Saxifraga sarmentosa 0.38 cM^3, bij Tradescantia zebrina 0.35 cM^3 eindelijk bij Aspidistra elatior bij 17° C. slechts 0.04 cM^3.

Vroegere proefnemingen met zonplanten hadden den schrijver overeenkomstige resultaten gegeven met die welke hij thans voor de roggebladen heeft vastgesteld. Zoo hadden tarwekiemen bij 15° C per gram droge stof 0.8 cM^3 zuurstof per uur verbruikt; bij boekweitkiemen was gevonden 1.3 cM^3 per gram per uur bij 20° C., d. i. eveneens c. a. 1 cM^3 bij 15° C., en bij verschillende grassen 0.75 à 0.8 cM^3.

De bedoelde tegenstelling zou uit deze getallen duidelijk op den voorgrond treden. In één geval vond de schrijver echter bij een schaduwplant een even groot getal als bij de lichtplanten, n.l. bij een blad-begonia, waar de opgenomen zuurstof per gram per uur ook 1 cM^3 bedroeg, maar dit blad verkeerde nog in den toestand van groei en bij het onderzoek van een volwassen Begoniablad bedroeg de zuurstof absorptie slechts 0.5 cM^3 per uur.

Worden de gevonden getallen omgerekend op de volume-eenheid van de versche, levende bladzelfstandigheid, en neemt men daarbij aan, dat de specifieke gewichten van de bladen der genoemden planten dezelfde zijn, dan vindt schrijver, dat per volumeeenheid per uur verbruikt wordt:

Roggebladen	15 cM^3.
Begoniabladen	5
Phalangium viviparum. . .	4
Saxifraga sarmentosa . . .	4
Tradescantia zebrina . . .	3
Aspidistra elatior	1

Op grond dezer gegevens komt de schrijver tot de conclusie:

De onderzochte kamerplanten, welke kunnen groeien bij lichtintensiteiten die zoo zwak, zijn dat gewone landbouwplanten daarbij etioleeren, hebben dit vermogen te danken aan de veel zwakkere ademhalingsenergie hunner volwassen bladen, welke zich tot die der landbouwplanten ongeveer verhoudt als 1 : 3.

Het feit in herinnering brengende, dat BOUSSINGAULT heeft aangetoond, dat bij de laurier de ademhalingsintensiteit 30 maal kleiner is dan de zuurstofafscheiding door het bladgroen, vindt de schrijver, aannemende dat de ademhaling 24 uur, de koolzuurontleding slechts 12 uur duurt, dat die groene plantendeelen, welke door beschaduwing, of in het algemeen door hunne plaatsing slechts $^1/_{15}$ van het daglicht ontvangen, niet meer in staat zijn droge stof te produceeren, wanneer zij behooren tot de lichtplanten, wel daarentegen, wanneer zij deelen van schaduwplanten zijn. Hij verbindt daaraan verschillende opmerkingen aangaande de wederkeerige verhoudingen tusschen de planten eener gemengde flora.

Hij stelt zich niet ten doel nader te onderzoeken op welke bijzondere eigenschappen van den bouw der bladen der lichtplanten haar grootere ademhalingsenergie berust maar hij wijst er op, dat de roggebladen met hun zuurstofademhaling van 15 cM^3 4.1$^0/_0$ ruw eiwit in hun levende bladzelfstandigheid bevatten, terwijl dit getal voor Aspidistra elatior met de zuurstofademhaling 1, slechts 1.9$^0/_0$ bedraagt. Tusschen deze getallen bestaat zonder twijfel verband.

Als praktische gevolgtrekking uit zijn onderzoek, wijst de schrijver er op, dat de juiste waardeering van het verschil tusschen licht- en schaduwplanten, voor den landbouwer een goede aanwijzing kan wezen bij de keus van soorten, welke hij als ondergewas wenscht te verbouwen.

Aangaande de intensiteit van het koolzuurreductieproces bij de schaduwplanten vermeldt de schrijver geen eigen waarnemingen, maar hij tracht door redeneering en door het gebruik maken van gegevens uit zijn ervaring ten opzichte van het productievermogen der landbouwgewassen, zijne, te dien opzichte aangenomen veronderstelling, te bewijzen.

Meer in het bijzonder vestigt hij de aandacht op de, naar zijne meening bestaande opmerkelijke gelijkheid van de totale hoeveelheid geproduceerde organische droge stof per hectare bij zeer uiteenloopende gewassen. Zoo zoude deze hoeveelheid bij de tarwe 7410 kilo (stroo en graankorrels), bij de mangelwortel 7800 (wortels en bladen), bij de beuk 6900 (drooghout) enz. bedragen. En deze overeenkomst zou moeten berusten op de gelijkheid van het per oppervlakte-eenheid aangeboden licht en op de gelijkheid van de intensiteit der bladgroenfunctie van de vergeleken soorten.

Ondergeteekenden kunnen de stelling van den schrijver, dat de zwakke ademhaling alleen voldoende is om het welig groeien der schaduwplanten te verklaren, niet als bewezen aannemen. Naar hun oordeel zouden voor dit bewijs ook cijfergegevens ten aanzien van het koolzuurreductieproces noodzakelijk zijn. Bij het gemis daarvan achten zij het gevaarlijk door redeneering en door feiten aan landbouwgewassen ontleend, te trachten deze gaping aan te vullen voor planten van een geheel andere levenswijze.

Maar ook in de bijzonderheden van zijne bewijsvoering kunnen ondergeteekenden den schrijver niet overal volgen. Zoo komt het hun voor, dat de overeenstemming tusschen de door hem aangevoerde cijfers van het productievermogen van een hectare beukebosch en een hectare tarweland slechts een schijnbare is, en berust op de door den schrijver vermelde verwaarloozing van den bladafval, en op het niet in rekening brengen van het verschil in verlies aan organische stof door de koolzuurademhaling, dat, wanneer de cijfers van DE SAUSSURE juist zijn, bij den beuk veel grooter moet zijn dan bij de tarwe.

Daar de ondergeteekende echter de vragen, die de Heer MAYER hier in bespreking heeft gebracht, zoowel voor wetenschap als praktijk van veel gewicht achten; daar verder de bijdragen door den schrijver tot beantwoording daarvan geleverd, getallenmateriaal bevat, waarvan de publiciteit aanleiding zal kunnen geven tot verder onderzoek; daar eindelijk in het geschrift, menige belangrijke opmerking voorkomt, welke verdient overwogen te worden,

zoo meenen zij aan de Akademie te moeten voorstellen de verhandeling van den Heer MAYER in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen.

M. W. BEIJERINCK.
W. F. R. SURINGAR.

OVER DE INTENSITEIT DER ADEMHALING

VAN

IN DE SCHADUW GROEIENDE PLANTEN.

DOOR

ADOLF MAYER.

Zooals men weet, heeft de reductie van het koolzuur in de groene gewassen onder gewone omstandigheden met zeer veel grootere intensiteit plaats dan de ademhaling er van, bij welke laatste koolzuur geproduceerd wordt. In een bijzonder geval (bij Laurier) heeft BOUSSINGAULT eens de verhouding tusschen de intensiteit van beide processen bepaald en de 30-voudige intensiteit van het reductieproces gevonden. Uit proefnemingen van HEINRICH met een landbouwgewas (haver) gedaan, blijkt wel is waar een veel nauwere verhouding. In elk geval echter is de intensiteit van het ademhalingsproces veel zwakker dan die van het productieproces. Uit deze wanverhouding is, zooals men weet, het feit te verklaren van de overheerschende productie van organische stof door de groene gewassen, niettegenstaande de ademhaling dagelijks 24 uren duurt, terwijl de reductie door de groene plantenorganen slechts gedurende de uren dat zij in het licht zijn — en door hare niet groene deelen (wortels bloemen, hout, parenchym der vruchten, epitheelweefsel enz.) in het geheel niet — plaats heeft, even als het andere feit, dat bij vele planten eene dagelijksche lichtperiode van ongeveer 6 uren voldoende is, om haar nog ten naaste bij het evenwicht aan stof te doen behouden,

of ook het feit, dat men zelfs zonder direkt zonlicht aanzienlijke opbrengsten kan verkrijgen. *

Nu is het echter wel voor een ieder, die zich deze verhouding bewust is, opmerkelijk, dat er, vooral onder de in kamers gekweekte sierplanten, een geheele reeks van zulke is, die nog onder zeer slechte omstandigheden, wat de hoeveelheid licht betreft, groeien en tieren, ja aan deze omstandigheden boven alle andere de voorkeur geven, waaronder, volgens eene ruwe berekening op grond der zoo even genoemde verhoudingen, de verbranding van organische stoffen door ademhaling bepaald de overhand zoude moeten verkrijgen. Ja een ijverige plantenphysioloog of landbouwscheikundige, die in uren van ontspanning dergelijke »schaduwplanten'' als blad-Begonias, Aspidistras enz. kweekt, zal in zijn doctrinairisme steeds er toe overhellen, deze gewassen te veel in het licht of zelfs in de zon te plaatsen, om spoedig in zijne resultaten beschaamd te worden door eenvoudige empirici in de bloementeelt, die niets van reductie en ademhaling weten, maar nauwkeurig dáár opletten, wat hun door andere ervarene lieden geleerd geworden is, en wat zij zelf wellicht daar nog bij waargenomen hebben.

Zulk eene mislukking echter leidt, zoo lang men nog voor leering vatbaar is, tot eene herziening der praemissen, van waar uit men zich tot de verkeerde gevolgtrekking had laten verleiden. Wanneer er planten zijn, die nog onder zulke ongunstige omstandigheden, wat de hoeveelheid licht betreft, groeien en aan droge stof toenemen, waarbij onze gewone, aan volle zon gewende landbouwgewassen en boomen door verbruik van haar eigen lichaamsstof ten gronde gaan, moet bij haar de verhouding tusschen reductie en ademhaling, ten minste onder gewone levensvoorwaarden anders zijn, en wel moet òf de reductie sterker òf de ademhaling geringer zijn, òf moet het eerste en het laatste gelijktijdig plaats hebben.

---

* Vergel. Landw. Versuchsst. XXIII p. 249 en vooral 255.

Wanneer het nu verder mogelijk is, de eerste van deze beide eventualiteiten en daarmede tevens ook de derde op grond van in de wetenschap vaststaande stellingen te elimineeren — en dit komt mij zeer goed uitvoerbaar voor — dan kan men de bekende feitelijke levenswijze der schaduwplanten niet anders verklaren dan uit eene veel kleinere ademhalings-intensiteit er van, die in dit geval dus met groote zekerheid gededuceerd kan worden en alleen nog, om volkomen zeker te gaan, de experimenteele verificatie, die ik getracht heb te geven en die hieronder zal worden medegedeeld, behoeft.

Wel vindt ook het reductieproces (de productie van organische stoffen) in verschillende planten met verschillende energie plaats. Deze bewering is niet alleen volgens de verschillende anatomische eigenschappen van het chlorophylorgaan a priori waarschijnlijk, er zijn zelfs ontwijfelbare experimenteele bewijsstukken voor aanwezig. Volgens opgaven van Pfeffer * werd b. v. de specifieke productie-energie voor Phaseolus multiflorus op 1 M^2. bladvlakte en in een uur tijds 0,34 gr. droge stof, voor Ricinus † 0,56 gr. gevonden. Men zou derhalve kunnen veronderstellen, dat de schaduwplanten wellicht door eene ongewoon sterke productie-energie zich onderscheidden, waarvan, na vermindering der lichtbron, nog zulk een groot gedeelte zoude overblijven, dat deze tegenover de ademhaling ook onder zeer ongunstige omstandigheden, wat het licht betreft, evenwicht vermochten te bewaren.

Zulk eene veronderstelling ontmoeten intusschen de allergrootste theoretische moeilijkheden, die uit de endothermische natuur van het productieproces ontstaan. Dit proces heeft niet plaats als het exothermische ademhalingsproces, onafhankelijk van uitwendig ter beschikking staande arbeidsbronnen, maar het heeft tot onmisbare voorwaarde: de aanwezigheid van licht en wel zoo, dat dit licht — natuur-

* Pflanzenphysiologie 1881 I p. 204.

† Zal wel moeten zijn Helianthus annuus. Zie den voorafgaanden text op p. 204 van het aangehaalde boek.

lijk in zooverre het tot instandhouding zijner uitwerking de overige noodzakelijke voorwaarden ruimschoots aanwezig vindt, of, zooals men het ook uitdrukken kan, in het minimum aanwezig is — de maat is der productie van organische droge stof. Daaruit volgt, dat de productie-energie bij alle planten gelijk moet zijn, wanneer er slechts genoeg groene organen aanwezig zijn, om van die stralen, welke bij dit proces medewerken, volledig partij te trekken, en met deze gevolgtrekking stemt zeer goed overeen de bijna volkomen gelijke opbrengst aan organische stoffen bij alle in den landbouw gekweekte gewassen, wanneer slechts alle overige voorwaarden der vegetatie zoo gunstig mogelijk zijn en vóór alles de bedoelde planten in het klimaat, waar zij geteeld worden, te huis behooren of er voldoende geacclimatiseerd zijn. * Daarmede is natuurlijk niet het feit in

---

* Maximale oogsten van de Hectare van de volgende gewassen zijn aproximatief grootendeels volgens mijne eigene ervaringen:

Tarwe	4000 Kg. zaad = 3360		samen 7410 Kg. org. droge stof.
	5000 " stroo = 4050		
Mangelwort.	60000 " wortels = 6600		" 7800 " " " "
	15000 " blader. = 1200		
Klaverhooi	10000 "	=	" 7800 " " " "
Grashooi	9000 "	=	" 7200 " " " "
Groene maïs	80000 "	=	" 7200 " " " "
Mergkool	70000 "	=	" 7700 " " " "

terwijl voor een maximale houtopbrengst met bij-opbrengst door den heer TUTEIN NOLTHENIUS, Docent voor houtteelt aan de school te Wageningen, berekend werd:

voor den Beuk *	6922 Kg. droog hout jaarlijks
" de Spar	6750 " " " "

Deze groote overeenstemming is zeer opmerkelijk.

---

* Wat de boschopbrengst aangaat, is wel „Zwisschennutzung" van klein hout medegerekend, maar niet afval van bladeren en twijgjes, ook niet de wortels. Maar het is opmerkelijk, dat bij de houtgewassen de gezamenlijke opbrengst, ondanks de langere assimilatieperiode kleiner is dan bij de weelderig ontwikkelde landbouwgewassen. Natuurlijk kan slechts van eene zeer grove schatting kwestie wezen; maar zelfs de globale overeenstemming dezer ruwe cijfers kan m. i. niet enkel op toevalligheid berusten. Overigens gaat ook bij landbouwgewassen iets verloren.

tegenspraak, dat de groene organen per eenheid bladoppervlakte verscheidene productie-constanten vertoonen; maar eene grootere constante beteekent dan slechts, dat in zulk een orgaan de het groene orgaan passeerende lichtstraal, wegens de dikkere laag van chlorophylhoudende cellen, of ten gevolge van de betere constitueering van het orgaan, beter tot zijn recht komt, maar juist daardoor natuurlijk ook het vermogen verloren heeft in een tweede, daaronder liggend orgaan op nieuw productief te zijn.

Met het oog op deze algemeene wet, die de productie van organische stof in de plant beheerscht, zal men nu niet mogen verwachten, dat er gewassen zouden kunnen zijn, begiftigd met een absoluut grooter productievermogen dan de juist wegens hare groote productie uitgekozen kultuurplanten; en wel begiftigd met zulk een groote energie *, dat men deze gerust door 50 of een dergelijk cijfer deelen kan en toch nog genoeg overhouden, om de ademhaling meer dan voldoende te dekken. Ook is de aanwezige hoeveelheid chlorophyll in veel gevallen b. v. bij de Bladbegonia, bij de Saxifraga sarmentosa volstrekt niet groot genoeg om, afgezien van de ontwikkelde theoretische moeilijkheid, zulk eene veronderstelling te kunnen wagen.

Wel is waar zijn — voor zoover ik kan inzien — twee beperkingen mogelijk ten aanzien van de zooeven besproken natuurwet. De eene ontstaat daardoor, dat eene schaduwplant organen zou kunnen bezitten tot concentratie van zwak licht. Zulke organen zijn bij Mossen die in holen groeien in den laatsten tijd ontdekt in de gedaante van lichtbrekende vormingen, die op zich zelve weinig organisch leven meer behoeven te bezitten en daardoor voor het verbruik van stof, niet bijzonder in aanmerking komen, maar als optische linzen werken ten opzichte van daarachter liggend chlorophyl. Blijkbaar echter kan van deze merk-

* Ik bedoel met deze uitdrukking natuurlijk niet eene productie-energie, die bij eene volledige hoeveelheid licht zich behoefde te doen gelden. Wij weten immers, dat de schaduwplanten in het volle licht wegens desorganisatie der bladorganen lijden. Ongeacht deze toevalligheid, die de proefneming zoude storen, blijft de redeneering juist.

waardige complicatie bij de gewone schaduwplanten geen of niet in het algemeen sprake zijn. Verder moet als beperking in het oog worden gehouden de mogelijkheid, dat niet voor alle chlorophylbevattende organen dezelfde zonnestralen als productief werkzaam in aanmerking behoeven te komen. Wanneer ik ook al niet aan de resultaten der onderzoekingen van DETLEFSEN *), waarvan de origineele publicatie niet ter mijner beschikking is, geloof, volgens welke door vele bladeren slechts ongeveer 1 % van de gezamenlijke energie van de daarop vallende zonnestralen ten behoeve der productiearbeid terug gehouden wordt, is het toch zeker, dat slechts een gedeelte van deze energie bij dit proces verbruikt wordt. Wanneer er bij gevolg bepaalde productieorganen bestonden (en deze bij de voornaamste schaduwplanten aanwezig waren) welke een grooter gedeelte van het spectrum der zon voor de vermeerdering der droge stof konden gebruiken — en dat er, voornamelijk voor vele lage organismen dergelijke toestanden bestaan, is vooral door de schoone onderzoekingen van TH. ENGELMAN †) tot zekerheid gebracht — dan kon zeer goed van eene specifiek grootere energie bij vele planten sprake zijn. Slechts daarom acht ik dergelijke complicaties voor onze hoogere planten al zeer onwaarschijnlijk, omdat deze alle een optisch tamelijk gelijkwaardige groene kleurstof schijnen te bezitten en omdat in dit geval onmogelijk zulk een opmerkelijk standvastige productie der kultuurgewassen als wij boven aangetoond hebben, zich zou kunnen voordoen.

Eindelijk zoude men, zooals bij vele schaduwplanten, voornamelijk bij diegene, welke wij, zooals de Bladbegonia en de Saxifraga sarmentosa, in zeer humusrijken grond plegen te kweeken, aan een saprophytisme kunnen denken, dat de eigene productie machtig ondersteunt, terwijl wel is waar andere zooals de Phalangium viviparum en de Tradescantia zebrina, gemakkelijk in bijna zuiver mineralen grond gekweekt kunnen worden.

---

*) Centrbl. f. Agriculturchemie 1878 p. 718.

†) Onderzoek. *Physiol. laborat.* Utrecht III R. XI 1889, Die Purpurbacteriën.

Al deze beperkingen en complicaties kwamen mij intusschen niet toereikend of algemeen genoeg voor om niet de gevolgtrekking te wagen, dat de schaduwplanten zich wel hoofdzakelijk door eene zwakkere ademhaling van de »volle-licht-planten" onderscheiden en ik beschouw de volgende experimenteele bewijsstukken meer als een bevestiging dan wel als eene oplossing. In ieder geval zal deze bevestiging, om volkomen zeker te gaan, niet gemist kunnen worden, en voornamelijk hen welkom zijn, die aan de zoo even vermelde beperkingen van de algemeene natuurwet meer waarde hechten dan ik.

De ademhalingsproeven, waarvan de resultaten in het kort hieronder zullen worden medegedeeld, werden weder, evenals mijne vroegere proefnemingen over ademhaling, met mijn voor dit doel gemeenschappelijk met v. WOLKOFF geconstrueerd apparaat gedaan. * Daarin worden de hoegrootheid der ademhaling uit de gasometrisch berekende volumenverminderingen eener door kwik afgesloten en door kaliloog van koolzuur zuiver gehouden luchtruimte, waarin het te onderzoeken object aanwezig is, berekend, want deze volumenvermindering ontstaat onder de bedoelde omstandigheden eenvoudig door opneming van zuurstof, die immers van hare zijde een der meest karakteristieke symptomen der ademhaling is.

De met dit apparaat verkregene resultaten waren bij de volgende planten als volgt:

I. Drie roggebladeren van gemiddelde afmetingen van 0,6 *cM³ volumen, en* 0,104 *gr.* na afloop der proefneming bepaalde hoeveelheid droge stof.

Juni.	Uur.	Gasvolumen cM³ bij 0° en 760 mm. cM³.	Zuurstofverbruik. absoluut	per uur	per 1 gr. droge stof.	Gemidd. temper.
10	4.30	43.9	cM³	cM³	cM³	°C
11	8.22	42.3	1.6	0.1	1.0	14.9
12	8.40	40.2	2.1	0.09	0.9	14.4

* Eene nauwkeurige beschrijving van het apparaat en van den gang der proeven in Landw. Jahrb. III p. 481. Andere ademhalingsproeven van mij zijn beschreven in Landw. Versuchsst. 18 p. 245, 19. p. 340.

II. *Een jonge spruit van Phalangium viviparum met eenige bladeren; volumen* 0,75 *cM*^{3}, *droog* 0,094 *gr.*

Juni.	Uur.	Gasvolumen cM^3 bij 0° en 760 mm. cM^3.	Zuurstofverbruik. absoluut	per uur	per droge stof 1 gr.	Gemidd. temper.
12	4.21	42.6	0.5	0.03	0.33	13.9
13	8.38	42.1				

III. *Een ouder, grooter en een zeer jong blad van Saxifraga sarmentosa; Volumen* 1.94 *cM*^{3}, *droog* 2.24 *gr.*

Juni.	Uur.	Gasvolumen cM^3 bij 0° en 760 mm. cM^3.	Zuurstofverbruik. absoluut	per uur	per droge stof 1 gr.	Gemidd. temper.
15	1.12	40.2	0.5	0.08	0.36	14.9
»	7.30	39.7	1.1	0.08	0.38	15.1
16	8.35	38.6	0.3	0.06	0.26	15.2
»	1.45	38.3				

IV. *Een tak van Tradescantia zebrina, ongeveer* 6 *cM. lang met* 9 *bladeren; Volumen* 0,7 *cM*^{3}, *droog* 0.05 *gr.*

Juni.	Uur.	Gasvolumen cM^3 bij 0° en 760 mm. cM^3.	Zuurstofverbruik. absoluut	per uur	per droge stof 1 gr.	Gemidd. temper.
17	1.30	46.8	0.4	0.02	0.35	15.2
18	8.32	46.4				

V. *De onderste helft van een tamelijk jong blad van Aspidistra elatior; Volumen* 1.2 *cM*^{3}, *droog* 0.32 *gr.*

Juni.	Uur.	Gasvolumen cM^3 bij 0° en 760 mm. cM^3.	Zuurstofverbruik. absoluut	per uur	per droge stof 1 gr.	Gemidd. temper.
19	4.22	43.2	0.3	0.01	0.04	17.8
20	2.30	42.9				

Reeds uit deze proefnemingen blijkt de zeer geringe ademhalings-energie der voor de proeven gebezigde bladeren van schaduwplanten tegenover die van Rogge, en dat

de maatstaf, waarmede ik hier gemeten heb, niet onrechtvaardig, is, blijkt bij vergelijking van de hier verkregen ademhalings-intensiteiten met die van vroeger gedane onderzoekingen. Zoo heb ik immers vroeger * veelvuldig met tarwekiemen gewerkt en bij deze ademhalings-grootheden verkregen, die bij volle vegetatieve ontwikkeling op temperaturen van ongeveer 15°C omgerekend, ongeveer op 0.8 cM^3 zuurstof per uur en per gram droge stof, dus vrij wel in overeenstemming met de roggebladeren komen te staan. Nu is het zeker waar, dat hierbij de wortel-ademhaling, die — zooals voornamelijk uit de proefnemingen van den heer FREYBERG † volgt — zeer aanzienlijk hooger is dan de blad-ademhaling, mede in begrepen is. Maar daar staat tegenover, dat gene kiemplanten in een geëtioleerden toestand verkeerden, waardoor de ademhaling weder aanmerkelijk verzwakt moest worden.

Bij boekweitkiemen vond ik gemeenschappelijk met VAN WOLKOFF eene ademhalingsintensiteit van ongeveer 1,3 Ccm. in het uur voor 1 gr. droge stof en bij eene temperatuur van ongeveer 20°. Bij de hier toegepaste temperatuur zou deze grootheid ongeveer 1 cM^3 bedragen hebben. De bladeren van verschillende zoete grassen eindelijk gaven bij de proefnemingen van FREYBERG, bij temperaturen van ongeveer 20° ademhalings-intensiteiten, van 1 tot 1,1 cM^3. hetgeen bij 15° nog steeds 0,75 — 0,80 cM^3 zoude bedragen.

Daar men vooral door deze laatstgenoemde cijfers reeds zeer goede gegevens bezit omtrent die ademhalings-grootheden, welke men bij bladeren van »licht-planten" te verwachten heeft, waartoe immers onze landbouwgewassen uit den aard der zaak bijna alle behooren, scheen het mij voor deze nieuwe proefnemingen voldoende te zijn eene enkele van deze planten als »Experiment témoin" er bij op te nemen, maar deze natuurlijk onder omstandigheden, die nauwkeurig met elkander te vergelijken zijn, te onderzoeken.

* In de boven geciteerde verhandelingen, die in de »Landw. Versuchsst. gepubliceerd werden.

† Waaromtrent ik in Landw. Versuchsst. 23 p. 463 gerefereerd heb.

Slechts een enkele keer heb ik bij eene ontwijfelbaar als zoodanig te beschouwen schaduwplant eene ademhalingsgrootte waargenomen, die met die der Rogge wedijveren kon, ja deze een weinig overtrof. Voor mijne eerste proefneming met de Bladbegonia, werd, wegens de groote afmetingen van de ook slechts half volwassen bladeren van deze plant, als wegens de kleinheid der afmetingen van het ademhalingsapparaat een zeer jong blad van 0.95 cM^3 gekozen. De resultaten hierbij verkregen zijn als volgt:

VI.

Juni	Uur	Gasvolumen bij 0° en 760 m.m. cM^3.	Zuurstofverbruik. absoluut cM^3.	per uur cM^3.	per 1 gr. droge stof. cM^3.	Gemiddelde temper. °C.	Opmerkingen
18	4.31	44.7	0,8	0,05	1,0	17.3	Droge stof slechts 0,052 dus slechts $5^1/_2$ %
19	8.26	43.9					

Maar het is immers sedert de proefnemingen van De Saussure * reeds bekend, hoezeer jonge organen in dit opzicht de oudere overtreffen, en bovendien is het duidelijk, hoezeer aan eene voortdurend zich ontwikkelende plant de volgroeide bladeren, wat de massa aangaat, de jonge overtreffen en op deze wijze voor het gezamenlijke resultaat den doorslag geven.

VII. De proef werd daarom met de helft van een grooter blad herhaald en daarbij verkregen:

Juni	Uur	Gasvolumen cM^3	Zuurstofverbruik. absoluut	per uur	per 1 gr. droge stof.	Gemiddelde temper.	Opmerkingen.
24	11.52	4.33	0.8	0.09	0.5	19.6°	Volumen = 2.1 cM^3 0.17 gr. droge stof.
»	8.46	42.5	1.1	0.09	0.5		
25	8.44	41,4					

Men ziet, dat men onder deze omstandigheden, die meer

* *Recherches s. l. végétation* 1804 p. 101

voor vergelijking vatbaar zijn, een resultaat verkrijgt, dat zeer goed met den algemeenen regel overeenkomt, al is het niet te ontkennen, dat de schaduwplanten onderling weder de allergrootste verschillen vertoonen en dat de ademhaling van de Begonia, op deze wijze uitgedrukt, ongeveer 10maal zoo groot is als die der Aspidistra.

In de bovenstaande voorstelling kan het eenigermate willekeurig schijnen, dat het de eenheid der droge stof is, waarnaar wij de hoegrootheid der ademhaling berekend hebben. Inderdaad doet de versche stof daarnaast zich als eene even belangrijke eenheid voor, wanneer men ziet, hoezeer Aspidistra en Begonia onderling in haar gehalte aan droge stof verschillen, en dat het zoo even besproken verschil in de intensiteit der ademhaling voor een groot gedeelte uit het zeer veel hoogere gehalte der eerstgenoemde plant aan droge stof voortvloeit. Bovendien zou men er aan moeten herinneren, dat immers de aanwezige hoeveelheid water in de levende organen volstrekt niet iets onverschilligs is en bij voldoend begieten ten minste, werkelijk door inwendig aanwezige momenten, die de transpiratie regelen, bepaald wordt. Slechts uit het agricultuurchemisch standpunt van het voedingsvermogen eener geoogste plantenmassa, zijn wij gewoon het water als iets ondergeschikts te behandelen; wij mogen echter niet vergeten, dat dit bestanddeel physiologisch van even groot gewicht is als de andere constitueerende bestanddeelen, van welke immers ook vele tijdelijk in overmaat aanwezig zijn. Ten aanzien van de Apidistra b. v. kon wellicht iets dergelijks omtrent de celstof met goede redenen gezegd worden.

Deze overwegingen hebben er mij aanleiding toe gegeven de berekening van de hoegrootheid der ademhaling ook voor de versche stof uit te werken, en de berekening hiervoor. als men voor versche stof het volumen stelt, dat bij de weinig van elkander afwijkende specifieke gewichten van plantendeelen ongeveer dezelfde resultaten moet opleveren, geeft de volgende cijfers:

Bladeren v. Rogge verbr. p. u. 17 vol.perc. zuurst.

Blader.	v.	Rogge		verbr.	p. u.	15	vol.perc.	zuurst.
»	»	Phalang.	vivipar.	»	»	4	»	»
Een blad	»	Saxifraga	sarmentosa	»	»	4	»	»
»	»	»	»	»	»	4	»	»
»	»	»	»	»	»	3	»	»
Blader.	»	Tradescantia	zebrina	»	»	3	»	»
Een stuk blad	v.	Aspidistra	elatior	»	»	1	»	»

Zeer jonge bladeren van Begonia verbruikten per uur 5 voluumpercenten zuurstof.

Een stuk van een ouder blad van Begonia verbruikte per uur 4 voluumpercenten zuurstof.

Een stuk van een ouder blad van Begonia verbruikte per uur 4 voluumpercenten zuurstof.

Wanneer men de grootere gelijkmatigheid der resultaten beschouwt — en tot zekere hoogte is dit immers logisch rechtvaardig — als argument voor de meer juiste wijze van uitdrukken, dan ware aan de laatste gekozene de voorkeur te geven. Alle onderzochte schaduwplanten vertoonen zeer kleine, in verhouding tot de Rogge hoogstens $^1/_3$ bedragende grootheden der ademhaling, en ook de jonge Begoniabladeren, die zoo even eene uitzondering maakten, voegen zich thans naar den algemeenen regel. De laatste zijn veeleer door een zeer gering gehalte aan droge stof dan door eene per voluumeenheid van het blad aanzienlijke hoegrootheid der ademhaling onderscheiden.

Als gezamenlijk resultaat van het experimenteele onderzoek kan dus met groote zekerheid de uitspraak gedaan worden : *)

---

*) Door een deskundige, die inzage had in de resultaten dezer proefnemingen, werd mij de opmerking gemaakt, dat de schaduwplanten, voor mijn onderzoek gebruikt, grootendeels zijn van eene andere en gedeeltelijk van eene tropische luchtstreek. En wel werd die objectie gemaakt in dien geest, dat de mogelijkheid werd aangeduid, dat ook andere tropische gewassen, die zich niet als schaduwplanten gedragen, bij de betrekkelijk lage temperatuur, waarbij ik heb gewerkt, eene ademhaling zouden kunnen vertoonen even laag als de door mij gekozen planten, terwijl zich inlandsche schaduwgewassen, die door mij niet zijn beproefd,

1. *De gewone als sierplanten gekweekte kamerplanten, die tegenover onze bekende landbouw- en boschbouwgewassen de opmerkelijke eigenaardigheid vertoonen, dat zij bij veel geringere lichtintensiteiten als gene vermogen te tieren, zijn, voor zooverre zij hier onderzocht zijn geworden, onderscheiden door zeer veel geringere ademhalings-intensiteit van hare ontwikkelde bladeren, zij het nu, dat men deze intensiteiten bepaalt voor de eenheid van het volumen van het blad of voor de eenheid van de daarin aanwezige droge stof.*

2. *Het bestaan van dit feit is een belangrijk moment ter verklaring van de geringe behoefte aan licht dezer planten, in zooverre dat, wanneer minder door de verbranding aan organische stof verloren gaat, ook minder productie in hetzelfde tijdsverloop noodig is, om dit verlies te dekken, zoodat lichter nog een overschot blijft, waaruit de vorming van nieuwe- en*

---

zich wellicht anders zouden gedragen. Hiertegen nu heb ik in te brengen, dat 1. de door mij gebruikte planten hier te lande weelderig groeien onder geheel dezelfde omstandigheden en ook bij dezelfde temperatuur als rogge en zich, behalve dat zij lichter door vorst beschadigd worden, alleen ten opzichte van het noodige licht van de rogge onderscheiden. In elk geval schijnt mij dus mijne proefneming te zijn eene bijdrage tot oplossing van het vraagstuk, waarom zulks mogelijk is. 2. Men is zeer goed bekend met het verloop der kromme der intensiteit van ademhaling bij onze gramineeën en weet derhalve, dat de ademhaling bij rogge bij 25° omstreeks naar evenredigheid met die temperatuurverheffing sterker geweest zoude zijn, dan bij de gebruikte temperaturen. Men zou derhalve eene geheel onwaarschijnlijke suppositie moeten maken aangaande de toeneming der ademhaling bij de gebruikte schaduwplanten bij de tropische temperatuur, om de door mij aangetoonde wanverhouding in de intensiteit van het proces omver te werpen.

3. Ik zou het niet als eene weerlegging mijner proeve van verklaring aanzien, indien iemand aantoonde, dat tropische gewassen in het algemeen bij gelijke temperatuur zwakker ademhalen dan de inheemsche lichtplanten. Ik zou daaruit ten hoogste concludeeren, dat zij allen door hunne organisatie om een of andere reden meer geschikt zijn, om ook als schaduwplanten te functioneeren.

4. Ik zou het natuurlijk wel als eene weerlegging beschouwen, wanneer inlandsche schaduwplanten, behalve woekerplanten en zoodanige, die zich uit humus voeden, even sterk ademhaalden als inlandsche lichtplanten; maar ik heb geen vrees, dat dit ooit zal gebeuren, nadat de door mij gedane proefnemingen zoo voldoende eene vooraf gedane conclusie verificeeren.

wasdom van reeds bestaande organen bestreden kan worden.

Deze stellingen hebben nu niet alleen eene algemeene, physiologische, maar ook speciaal eene de aandacht waardige agrikulturchemische beteekenis, tot welke laatste wij geleid worden, als wij de positie van de bedoelde schaduwplanten in de natuur in 't oog vatten. De natuurlijke standplaats van deze planten is òf in holen, ravijnen of in grondspleten, waarheen, weinig licht dringt, òf — en dit in veel ruimer mate, daar bedoelde standplaatsen toch slechts zeer locaal voorkomen — beschaduwd door andere planten, voornamelijk door houtgewassen, in bosschen Hier hebben zij hare specifieke eigenschappen vermoedelijk in den strijd om het bestaan verworven. Andere eigenschappen, die de »licht-planten" karakteriseeren, zooals b. v. het grooten weerstand bieden aan het uitdrogen en welke deze bezitten door sterke cuticuliseering der celwanden, door het aanwezig zijn van bijzonder georganiseerde, de verdamping bijzonder krachtig regelende huidmondjes en dergelijke, zijn daarbij gedeeltelijk verloren gegaan of in het geheel niet tot ontwikkeling gekomen. Van daar, dat de Bladbegonia in het licht zoo sterk uitdroogt, dat het productievermogen, dat immers, zooals aangetoond kan worden, zeer veel afhangt van den waterrijkdom der chlorophylhoudende cellen *) nood lijdt en de plant minder toeneemt dan onder veel ongunstigere verhoudingen tegenover het licht. Daarbij komt dan nog de rechtstreeksche beschadiging der opperhuid door het sterke licht. Dit gebrek aan weerstandsvermogen is overigens niet uitsluitend door natuurlijke teeltkeuze, maar ook individueel verworven, daar het bekend is, dat planten in den vollen grond in dit opzicht veel meer verdragen, terwijl de in de vochtige lucht der broeikassen gekweekte exemplaren gewoonlijk reeds in de droge lucht onzer vertrekken sterk achteruitgaan. Doch hiermede hebben wij voor het oogenblik niet te maken.

Ik wenschte veeleer te dezer plaatse er opmerkzaam op te maken, dat ook in onze bosschen dergelijke schaduw-

*) Vergel. KREUSLER: *Landw. Jahrb.* 1885 p. 913.

planten in groot aantal groeien, Varens, Mossen en vele andere. Op de opene plaatsen in de bosschen vinden wij echter weder eene andere plantengroei, bewijs genoeg, dat het niet de voeding der wortels in de boschhumus, maar de atmospheerische voorwaarden voor den plantengroei zijn, weinig licht en veel vochtigheid, die haar in de bestaande omstandigheden de zege verschaffen.

Ook voor gemengden plantengroei op den akker, voornamelijk voor die in de weide, heeft het bedoelde gezichtspunt een zekere beteekenis. In de praktijk onderscheidt men sinds lang boven- en ondergrassen van elkander en het zijn bepaalde Gramineeënsoorten, die meer in de eene dan in de andere richting geschiktheid tot ontwikkeling bezitten, b.v. Lolium italicum en Phleum pratense meer bovengras, Lolium perenne en Avena flavescens meer ondergras.

De beteekenis van deze in verschillende richting ontwikkelde eigenschappen in de huishouding der natuur ligt voor de hand. De bladeren der »licht-planten" houden bij bepaalde lichtsterkte op om productief te zijn. Stellen wij de verhouding tusschen productie-intensiteit en ademhalingsintensiteit, zooals door Boussingault voor een bijzonder geval is aangetoond, als 30 tot 1, dan zal, daar de ademhaling steeds 24 uren duurt, de verlichting onder gemiddelde verhoudingen slechts den halven tijd, reeds bij eene vermindering van het licht door beschaduwende groene organen op $^{1}/_{15}$ der volle hoeveelheid, deze niet meer voldoende zijn voor eene overproductie. Op deze wijze beschaduwde bladeren der licht-planten worden nutteloos voor het gezamenlijke organisme en vallen spoedig aan terugvorming, aan afsterven ten prooi, een verschijnsel, dat wij overal in de natuur aan de van het licht afgewende bladeren van de bedoelde planten kunnen waarnemen. Maar hetzelfde zwakke licht kan tengevolge van de bijzondere organisatie der schaduw-planten, door de groene organen van deze laatste nog nuttig verwerkt worden. Het gezamenlijk partij trekken van het licht, waarop het in den landbouw zoo zeer en ook bij de houtteelt, zij het ook dikwijls slechts voor het doel van eene ruimere vorming van humus, aankomt, wordt zoodoende veel volle-

diger dan het zonder deze bijzondere organisatie het geval zou zijn. Ook wordt uit deze zelfde verhouding duidelijk, dat ook eene dergelijke verdeeling van arbeid voor de verschillende groene organen van een en dezelfde plant bestaat. Want de gewoonlijk naar het licht toegekeerde jonge bladeren vertoonen, zooals men weet, bij een geringer productievermogen een aanzienlijker ademhaling, dus een nauwere en ongunstigere verhouding tusschen beide processen, dan de volgroeide en oudere bladeren, die meestal door gene beschaduwd, dus zwakker verlicht zijn. Deze vertoonen dus tegenover gene reeds eenigermate de verhouding, die bij schaduwplanten tegenover de lichtplanten bestaat; zooals men ziet, zeer in het voordeel van het gezamenlijke organisme. Het kan onder praktische omstandigheden voordeelig wezen van deze onderlinge betrekkingen zich bewust te zijn.

Wat dan eindelijk de oorzaak der besproken verschijnselen aangaat, is het duidelijk, dat eene geringe hoegrootheid der ademhaling bij de schaduw-planten op eene geringere intensiteit van hare stofwisseling in het algemeen wijst; want ademhaling is immers, zooals men sedert lang weet, een verschijnsel, dat met de intensiteit er van rijst en daalt. Het zijn de organen, die op haren tijd de sterkste evolutie vertoonen, bloemen en kiemen, die het sterkst ademhalen, en het zuurstofverbruik stijgt in deze organen met het toenemen der temperatuur, die op dezelfde wijze (hoewel ook niet tot dezelfde hoogte, voor den vegetatieven wasdom, maar toch) voor den gang der geslachtelijke processen, de protoplasma-stroomingen, gunstig zijn. Tot zekere hoogte is het stikstofgehalte van een plantendeel een maatstaf voor intensief leven *), en ik heb het daarom voor niet onbelangwekkend gehouden het stikstofgehalte van twee voor de ademhalingsproeven gebruikte schaduwplanten in deze richting te onderzoeken.

Nu bezit wel is waar volgens deze twee in het werk

---

*) Vergel. o. a. Corenwinder, *Annal. chim. et phys.* [5] 14, 118; Referaat in *Naturforscher* 1879, p. 64.

gestelde analysen Tradescantia zebrina volle 21,1 pCt. ruw-eiwit in de luchtdroge stof, terwijl Aspidistra variegata slechts 7,5 pCt. van dit bestanddeel bevatte. Het eerste resultaat is zoo hoog, dat eene verklaring uit dit oogpunt niet mogelijk schijnt te zijn. Slechts wanneer men de gevonden cijfers op het levende blad omrekent, verkrijgt men bij Tradescantia ongeveer 1,7 pCt. eiwit, Aspidistra 1,9 pCt., terwijl onze Rogge 4,1 pCt. ruw-eiwit bevatte. Ik laat het, dewijl het niet in het plan van dit onderzoek lag, onbeslist, of op deze wijze eene verklaring mogelijk is.

Of nu echter de verhoudingen, zooals zij hier bij wijze van aanduiding voorgesteld zijn, bij verder voortgezette onderzoekingen, waarbij het noodig zal wezen, de verschillende vormen van stikstof goed uit elkander te houden, al of niet bevestigd mochten worden of niet, in ieder geval zullen wij de schaduw-planten te karakteriseeren hebben als planten met geringe stofwisseling. Dit blijkt immers ook uit den langzamen wasdom en het lange leven haren organen, ofschoon hierbij te onderscheiden blijft, dat immers ook onze houtgewassen, die allermeest onder de lichtplanten gerekend moeten worden, langzaam groeien. Dit verschijnsel kan echter in verschillende gevallen op verschillende oorzaken terug gebracht worden, behalve op de geringe hoegrootheid der productie, ook nog op de neiging het product niet terstond voor de vorming van nieuwe organen te verbruiken, maar in geconcentreerden vorm als bouw- of reservestof te bewaren, welke neiging voor de stikstof-arme planten, waartoe onze houtgewassen immers behooren, eigenaardig is. De jonge houtplant produceert per eenheid bladorgaan, of ten minste bij volledig verbruik der lichtenergie door boven elkander geplaatste bladeren, vermoedelijk evenveel als de jonge tarweplant, anders zoude het gezamenlijke product van eene bectare bosch niet ongeveer dezelfde waarde bedragen als dezelfde oppervlakte met graan bezaaid; maar de eerste verbruikt, door een te gering eiwitgehalte daarin verhinderd, het zoo even verworvene niet terstond voor de vorming van nieuwe organen, maar legt het als dood kapitaal terug in het hout van het eigen weefsel en is zoodoende niet in staat

de stof van het eigen individu zoo snel te verveelvuldigen. De ongelijksoortigheid bestaat hier slechts met betrekking tot de afzonderlijke plant of, zooals men het ook aanduiden kan, in den toestand van wording van het bosch. De schaduw-plant daarentegen leeft voortdurend onder geheel andere voorwaarden. Bij haar is het langzaam groeien een noodzakelijk gevolg van de langzaam voortgaande stofwisseling, van de geringe lichtintensiteit, waarmede zij geleerd heeft zich te vergenoegen; maar ook zij vervult de rol, die haar door de natuur toegewezen werd, met dezelfde virtuositeit als de meer licht behoevende gewassen.

Het experimenteele gedeelte van het onderzoek is volgens mijne aanwijzingen door den Heer F. F. STEMMERIK, Assistent aan het Proefstation alhier, met snel verworven zaakkennis en grooten ijver ten uitvoer gebracht geworden.

Proefstation der Rijkslandbouwschool te Wageningen 30 *Juni* 1891.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 30 Januari 1892.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, STOKVIS, GRINWIS, HOOGEWERFF, ZEEMAN, FORSTER, ENGELMANN, HUBRECHT, MICHAËLIS, HOEK, HOFFMANN, KAPTEYN, LORENTZ, PLACE, VAN DORP, BAKHUIS ROOZEBOOM, VAN DER WAALS, SCHOUTE, VAN DIESEN, PEKELHARING, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, KORTEWEG, BEIJERINCK, MAC. GILLAVRY, VAN RIEMSDIJK, WEBER, FRANCHIMONT, J. A. C. OUDEMANS, RAUWENHOFF, KOSTER, SURINGAR en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris; voorts de Correspondenten VAN SCHELLE en SLUITER.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. BRUINWOLD RIEDEL, Secretaris van de Maatschappij »tot Nut van 't Algemeen" te Amsterdam, Januari 1892; 2°. G. C. W. BOHNENSIEG, Bibliothecaris van Teyler's Stichting te Haarlem, 23 Januari 1892; 3°. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 25 Januari 1892; 4°. W. N. DU RIEU, Bibliothecaris der Universiteit te Leiden, 23 Januari 1892; 5°. J. TIDEMAN, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 26 Januari 1892; 6°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de Polytechnische School te Delft, 14

Januari 1892; 7°. L. BROEKEMA, Directeur van de Rijkslandbouwschool te Wageningen, 29 Januari 1892; 8°. H. DE BUSSY, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, 27 Januari 1892; 9°. den Secretaris van de Académie nationale des Sciences te Caen, 12 December 1891; 10°. H. G. ZEUTHEN, Secretaris van de kong. danske Videnskabernes Selskab te Kopenhagen, 5 December 1891; 11°. SOPHUS MÜLLER, Secretaris van de Société royale des Antiquaires du Nord te Kopenhagen, 10 Juli 1891; 12°. J. RICHTER, Secretaris van de Société royale des Sciences te Drontheim, 7 Januari 1892; 13°. W. H. WARREN, Secretaris van de royal Society of N. S. W. te Sydney, 8 December 1891; aangenomen voor bericht.

Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 18, 24 December 1891, 6, 21 Januari 1892; 2°. R. ATKINSON, Secretaris van de royal Irisch Academy te Dublin, 1891; 3°. den Secretaris van de k. k. österreichische Gradmessungs-Commission te Weenen, 1891; 4°. D. CHILOVI, Bibliothecaris van de Biblioteca nazionale centrale te Florence, 1891; 5°. J. A. PALMEN, Secretaris van de Société de géographie de Finlande te Helsingfors, 29 December 1891; 6°. den Directeur van de geological and natural History Survey te Sussex, 1891; 7°. S. SINCLAIR, Secretaris van het Australian Museum te Sydney, 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren kennisgevingen van de Heeren A. C. OUDEMANS JR., GUNNING, SCHOLS, MOLL en van BEMMELEN, dat zij verhinderd zijn ter vergadering te verschijnen. — Voorts een brief van den Heer J. BERTON (Agen, 7 Jan. 1892), ter begeleiding van eene »Preuve de l'addition des nombres entiers et des nombres décimaux." Ter visie voor de wiskundige Leden der Afdeeling.

— De Secretaris leest het door de Heeren BEHRENS en

VAN BEMMELEN ingezonden verslag over de verhandeling van Dr. H. VAN CAPPELLE (Over het diluvium van West-Drenthe). — Het advies der Commissie luidt gunstig en haar voorstel om de verhandeling te bestemmen voor de werken der Akademie, wordt zonder discussie aangenomen.

— De Heeren LORENTZ en VAN DE SANDE BAKHUYZEN brengen een gunstig verslag uit over het opstel van Dr. J. L. SIRKS: »De l'influence de la diffraction par un réseau à mailles rectangulaires, placé devant l'objectif d'une lunette, sur la clarté de l'image principale d'une étoile". Hun advies om het op te nemen in de Verslagen en Mededeelingen wordt aangenomen.

— De heeren LORENTZ en VAN DER WAALS schetsen hun oordeel over de verhandeling van den Heer A. C. VAN RIJN VAN ALKEMADE (Toepassing der theorie van GIBBS op evenwichtsverhouding van zoutoplossingen en vloeistofmengsels). Dat oordeel luidt gunstig, hoewel aan den Schrijver in overweging behoort gegeven te worden, zijne verhandeling op enkele plaatsen te bekorten en dus tot bescheidener afmetingen terug te brengen. Het voorstel der Commissie om de verhandeling aan den Schrijver terug te zenden en hem in kennis te stellen met den wensch van Heeren beoordeelaren, die zich persoonlijk bereid verklaren nader met den Heer VAN RIJN VAN ALKEMADE te onderhandelen, wordt aangenomen.

— De Heer VAN DIESEN leest het jaarverslag der Geologische Commissie en legt daarbij over de Rekening en Verantwoording der som van *f* 500, voor het jaar 1891 door de Regeering ter beschikking der Commissie gesteld. De hulp, door deze ondervonden van de Heeren Dr. J. LORIÉ, Dr. H. VAN CAPPELLE en Dr. I. L. C. SCHRÖDER VAN DER KOLK, geeft haar aanleiding voor te stellen, dien Heeren, voor hun belangloos streven, den dank der Afdeeling aan te bieden. Hiertoe wordt bij acclamatie besloten. Nog geeft de Commissie, met het oog op de nu reeds verkregen

uitkomsten, in overweging, ZE. den Minister van Binnenlandsche Zaken te verzoeken, op de begrooting voor het jaar 1893 eene som van *f* 1000 in plaats van *f* 500.— voor de werkzaamheden der Commissie uit te trekken. Ook dit voorstel wordt aangenomen. Een afschrift van het Jaarverslag zal den Minister van Binnenlandsche Zaken worden aangeboden.

— De Heer PEKELHARING spreekt over de samenstelling van het fibrineferment.

Voor eenigen tijd werd door Spreker medegedeeld dat de uit, van fibrinogeen bevrijd, bloedplasma door verzadiging met $Mg\ SO_4$ of Na Cl, of door dialyse neergeslagen globuline een stof bevat die, met behulp van kalkzouten, oplossingen van zuiver fibrinogeen tot stolling kan brengen, en een kalkverbinding levert, die alle eigenschappen vertoont van fibrineferment. Hij leidde daaruit af dat het fibrineferment een kalkverbinding is, die gevormd wordt uit een, waarschijnlijk uit de gevormde elementen van het bloed, bij het afsterven vrij wordende stof, en de in het bloedplasma opgeloste kalkzouten. Omtrent den aard dier stof kon echter niet meer worden gezegd dan dat zij, evenals globuline, door dialyse en door verzadiging van de oplossing met Na Cl gedeeltelijk, door verzadiging van de oplossing met $Mg\ SO_4$ volkomen kon worden neergeslagen.

Nu deelt Spreker mede dat uit plasma, dat door opvangen van het bloed in kaliumoxalaat of in bloedzuigerextract (1 bloedzuigerkop op 10 cc Na Cl 0,6 pCt.) voor stolling gevrijwaard is, door middel van azijnzuur een stof kan worden neergeslagen, die hij voor het organische bestanddeel van het fibrineferment meent te mogen houden.

Wordt bij met een of twee volumina gedestilleerd water verdund plasma (van rund, hond of paard) voorzichtig azijnzuur gevoegd, dan ontstaat er een neerslag die, wanneer het punt van neutralisatie overschreden wordt, allengs weer oplost. Volkomen oplossing wordt echter eerst bij sterk zure reactie verkregen. Men voegt nu zooveel azijnzuur bij totdat de vloeistof zeer duidelijk zuur reageert, maar nog geheel troebel is.

Met behulp van den centrifugaaltoestel zet zich de neerslag in een vaste laag op den bodem van het glas af, waarna de vloeistof, soms volkomen helder, soms ook eenigszins opaliseerend, kan worden afgeschonken. Het praecipitaat wordt in zoo weinig mogelijk ammonia of kaliloog opgelost, de oplossing wordt met veel water verdund, en met azijnzuur zuur gemaakt. Het hierbij gevormde praecipitaat wordt weder door den centrifugaaltoestel afgescheiden, en daarna met gedestilleerd water gewasschen. De zoo verkregen stof kleurt in vochtigen toestand blauw lakmoespapier rood, zij lost gemakkelijk op in verdund alkali, in overmaat van azijnzuur en, bij neutrale reactie, in verdunde keukenzoutoplossing. Ook lost zij volkomen op in HCl 0,2 pCt. Deze oplossing blijft bij 35° C. langen tijd helder, maar is er eenig pepsine aan toegevoegd, dan wordt zij bij die temperatuur spoedig troebel. Na 24 uren heeft zich dan een vlokkige neerslag afgezet, die onoplosbaar is in zoutzuur en in azijnzuur, oplosbaar in alkaliën, en, met salpeter en natriumcarbonaat gegloeid, een asch levert, die gemakkelijk in water oplost en met molybdeenzure ammonia een duidelijke phosphorzuur-reactie geeft. Men mag dus aannemen dat de door azijnzuur uit bloedplasma afgescheiden stof een nucleoalbumine is.

Deze zelfde stof kan met behulp van azijnzuur bereid worden uit den globuline-neerslag die, door bloedplasma eerst met $NaCl$ van fibrinogeen te bevrijden en het dan door dialyse arm aan zout te maken of met $MgSO_4$ te verzadigen, te verkrijgen is.

Deze nucleoalbumine nu heeft in sterke mate het vermogen om, met behulp van kalkzouten, fibrinogeen tot stolling te brengen. De krachtigste werking werd verkregen door de nucleoalbumine in kalkwater op te lossen, de overmaat van calcium-hydroxyde te verwijderen door CO_2 door te leiden, en het overtollige CO_2 door een stroom van lucht te verjagen. Daarbij is het noodig een weinig keukenzout aan de vloeistof toe te voegen. Anders wordt, zoodra het kalkwater geneutraliseerd is, de werkzame stof, wel niet volkomen, maar toch voor een groot deel gepraecipiteerd.

Door verwarming op 65° C. verliest de nucleoalbumine het vermogen om met kalkzouten fibrinogeen te doen ontstaan. Bij dezelfde temperatuur wordt de heldere, neutrale oplossing in keukenzout troebel.

De vraag moest nu gesteld worden of deze nucleoalbumine zelve het »zymogeen" is dat zich met kalk tot fibrineferment kan verbinden, dan wel, evenals uit plasma neergeslagen fibrinogeen en paraglobuline, het zymogeen slechts mechanisch heeft meêgesleept.

Is het laatste het geval, dan zou men mogen verwachten dat, evenals fibrinogeen, door het in water op te lossen en met Na Cl weer neer te slaan, gemakkelijk van zymogeen bevrijd kan worden, evenzoo ook deze nucleoalbumine door herhaald oplossen in alkali en praecipiteeren met azijnzuur, allengs het vermogen om met kalk fibrineferment te leveren, verliezen zou. Dit was echter geenszins zoo. Veeleer werd de gereinigde nucleoalbumine krachtiger werkzaam gevonden dan de slechts eenmaal gepraecipiteerde.

Langs anderen weg kon, naar Spreker meent, afdoende worden aangetoond dat het zymogeen bij de zure reactie van het plasma niet eenvoudig langs mechanischen weg wordt neergeslagen. Wanneer van hetzelfde, met twee volumina water verdunde plasma, de eene helft nauwkeurig met azijnzuur geneutraliseerd, de andere helft zuur gemaakt wordt, dan is de neerslag in de eerste helft veel grooter dan in de tweede. Wordt dus het zymogeen langs mechanischen weg neergeslagen, dan moet de geneutraliseerde vloeistof veel vollediger daarvan bevrijd zijn dan de zuur gemaakte. Juist het omgekeerde bleek het geval te zijn. Werden beide van den neerslag bevrijde vloeistoffen met kalkwater alkalisch gemaakt (waarbij gezorgd werd dat beiden even sterk verdund werden) en daarna achtereenvolgens met CO_2 en dampkringslucht behandeld, dan stolde telkens de vloeistof die geneutraliseerd was, terwijl zich in de met overmaat van azijnzuur behandelde vloeistof òf in het geheel geen, of slechts een veel geringer stremsel vormde dan in het geneutraliseerde plasma. Daarmede vervalt alle grond om aan te nemen dat het zymogeen

niet de nucleoalbumine zelve, maar een verontreiniging daarvan is.

Aangezien nu de verbinding van deze nucleoalbumine met kalk, in andere eigenschappen zoowel als in de werking op fibrinogeen, volkomen met fibrineferment overeenstemt, en aangezien ook uit volgens de methode van Schmidt bereid ferment door digestie met pepsine en zoutzuur nucleine verkregen kon worden, meent Spreker te mogen aannemen dat fibrineferment is samengesteld uit nucleoalbumine en kalk, en ontstaat zoodra de in het bloed zwevende elementen te gronde gaan, waarbij nucleoalbumine in het plasma opgelost wordt en zich van kalk meester maken kan.

Dat de nucleoalbumine inderdaad van de genoemde elementen van het bloed — waarbij in de eerste plaats wel aan de leucocyten te denken is — afstamt, wordt o. a. waarschijnlijk gemaakt door hetgeen waargenomen kan worden aan bloed, dat door vermenging met bloedzuigerextract — intra- of extravasculair — voor stolling gevrijwaard is. Het plasma van dit bloed stolt — wanneer het ten minste zooveel mogelijk van gevormde elementen bevrijd is — noch door verdunning met water, noch door het doorleiden van CO_2, noch ook door toevoeging van kalkzouten, maar het stolt snel en volledig zoodra het vermengd wordt met uit dit plasma door centrifugeeren afgescheiden en daarna met water behandelde bloedlichaampjes Ook stolt het na toevoeging van uit plasma afgescheiden nucleoalbumine. De oorzaak van het niet stollen van bloedzuigersplasma ligt dus niet aan gebrek aan kalkzouten, maar aan gebrek aan nucleoalbumine. (Ook uit den met water behandelden cruor van het met bloedzuigerextract vermengde bloed kan, door toevoeging van azijnzuur tot duidelijk zure reactie, nucleoalbumine afgescheiden worden.) Wel is waar kan ook uit bloedzuigerplasma nucleoalbumine die met kalk fibrineferment vormt, verkregen worden, maar daarbij moet in aanmerking genomen worden dat het Spr. althans nooit gelukt is het plasma door centrifugeeren volkomen van alle gevormde bestanddeelen te bevrijden. Met water verdund bloedzuigerplasma is niet vrij van nucleoalbumine,

maar het bevat niet zooveel van deze stof als, in dit plasma, voor de vorming van fibrine noodig is.

Het ligt voor de hand eenig verband te zoeken tusschen de uit bloedplasma afgescheiden nucleoalbumine en de stoffen die door WOOLDRIDGE onder de namen van serumfibrinogeen en weefselfibrinogeen beschreven zijn. Bij deze gelegenheid wenschte Spr. zich daaromtrent te bepalen tot de mededeeling, dat ook de nucleoalbumine uit het bloed, bij konijnen in de vena jugularis ingespoten, intravasculaire stolling kan teweegbrengen.

Ten slotte merkt Spreker op, dat het vrij worden van een nucleoalbumine, een stof met de eigenschappen van een zuur, uit de afstervende cellen van dit bloed, in overeenstemming is met het verschijnsel, dat de alkalische reactie van het bloed afneemt van het oogenblik waarop het de bloedvaten verlaat, totdat het geheele stollingsproces afgeloopen is.

De voordracht geeft aanleiding tot eene korte discussie tusschen den Spreker en de Heeren PLACE, BEIJERINCK en KOSTER.

— De Heer WEBER spreekt over de Zoetwater-fauna van Insulinde en wel in de eerste plaats over Ichthyoxenos Jellinghausii HERKLOTS, door hem in zoetwater te Kajoe-Tanam, Sumatra, op Puntius gevonden. Hij toont aan, dat deze parasietische Isopode de huid van den visch onmiddellijk vóór de anaalopening zakvormig naar binnen instulpt, in de richting naar de buikholte toe. De zoo gevormde zak, die slechts door een uiterst nauwe opening met de buitenwereld communiceert en het ademhalingswater laat toetreden, bevat — zooals reeds HERKLOTS mededeelde — steeds een grooter wijfje en een veel kleiner mannetje. Spreker kan dit bevestigen, althans voor exemplaren, die het larven-stadium te boven zijn. Het belangrijk grootere wijfje is steeds gunstiger geplaatst dan het mannetje ten opzichte van de ademhaling, aangezien het met zijn kieuwdragend achterlijf naar de opening van den zak gekeerd is, terwijl het mannetje diep verscholen en ver van die opening verwijderd is.

Ter verklaring van het eigenaardige verschijnsel, dat steeds twee geslachtsrijpe individuën van verschillend geslacht vereenigd zijn, is de gedachte uitgesproken, dat Ichthyoxenos proterandisch hermaphrodiet zou zijn en dat het eene individu reeds vrouwelijke geslachtsorganen tot rijpheid zou gebracht hebben, ten gevolge van betere voeding, terwijl het andere, door slechtere voeding, nog op het stadium mannetje zou zijn gebleven.

Deze beschouwing bevat een belangrijke kern van waarheid. Maar zij moet anders geformuleerd worden; ook is de onderstelling onjuist, dat beide individuën zich gelijktijdig vasthechten.

Men kan in de postembryonale ontwikkeling van Ichthyoxenos deze stadia onderscheiden. Uit het ei komt de larve, die nog in den broedzak der moeder blijft vertoeven en het eerste stadium voorstelt. De larve in het tweede stadium is tot zwemmen geschikt en dringt in den visch. Hier wordt achtereenvolgens het derde en vierde larvenstadium doorloopen, daarop het stadium van het jonge dier, dat evenals enkele andere Cymothoinen morphologisch hermaphrodiet is, aangezien mannelijke en vrouwelijke geslachtsorganen aanwezig zijn. Functioneel hermaphroditisme bestaat hier echter nooit, aangezien eerst de mannelijke geslachtsklier tot rijpheid komt. Later eerst, na meerderen groei, de vrouwelijke. Zoodra het dier geschikt wordt om als wijfje optetreden, verliezen de mannelijke geslachtsklieren haar uitloozing naar buiten en gaan achteruit.

Men kan gemakkelijk aantoonen, dat beide individuën niet gelijktijdig in den visch indringen. Dat individu, 't welk zich het eerst heeft vastgezet, is ouder dan het andere, zal daarom ook eerder wijfje worden. Betere voeding en snellere groei zullen dat bevorderen. Hierbij zal de betere plaats, die het eerste, sterkere individu weet te handhaven, eene rol spelen.

Het feit, dat Ichthyoxenos behoort bij de familie der Cymothoinae, die typisch .marien zijn, geeft Spreker aanleiding meer in het algemeen over de zoetwater-fauna van Insulinde uit te wijden. Hij zet uiteen, dat naast soorten, die ook in Europa door identische of paralelle vertegen-

woordigd zijn, in Indië echter een zeer ondergeschikte rol vervullen, geheel vreemde elementen in de fauna optreden en den boventoon voeren. Spreker toont dit in het bizonder voor Crustaceeën aan en wijst er op, dat hierbij marine vormen vrij talrijk zijn. Deze mogen echter niet als marine relicten worden beschouwd. Voor velen althans kan men aantoonen, dat zij uit zee in het zoetwater ingedrongen zijn en men mag aannemen, dat deze verrijking der zoetwater-fauna van uit zee ook thans nog plaats grijpt.

— De Heer Engelmann biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer Dr. H. J. Hamburger, leeraar aan de Veeartsenijkundige School te Utrecht: »Over den invloed van zuur en alkali op gedefibrineerd bloed". Op verzoek van den Voorzitter verklaren de Heeren Engelmann en Pekelharing zich bereid, daarover in de Februari-vergadering verslag uit te brengen.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de vergadering gesloten.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER **Dr. H. VAN CAPPELLE,**

GETITELD:

OVER HET DILUVIUM VAN WEST-DRENTHE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Januari 1892).



Daar een kort overzicht van den geologischen arbeid, in Drenthe door den schrijver verricht, reeds aan de Akademie medegedeeld en in de Verslagen en Mededeelingen opgenomen is, kan het Verslag over de ter tafel liggende uitvoerige verhandeling in beknopten vorm uitgebracht worden.

De schrijver handelt achtereenvolgens over:

Het gebied van het keileem in de omstreken van Havelte.

Het morainelandschap en de daarin aanwezige hooge wallen (Bisschopsberg en Havelterberg).

De steensoorten en versteeningen, welke in het keileem gevonden zijn.

De diepere lagen, die men bij gelegenheid van grondboringen heeft leeren kennen.

Eindelijk het gebied van het heidezand en van het zanddiluvium van Staring.

Aan het slot van zijn stuk geeft de schrijver een tabellarisch overzicht van de verdeeling der diluviale lagen, waartoe hij in den loop van zijn uitvoerig onderzoek gekomen is, nl.:

I. Jongdiluvium, gevormd aan het einde v. d. 2en glaciaaltijd.	. . . .	*a*. Dalzand en dekzand, zanddiluvium van Staring.	
II. Middeldiluvium, gevormd a. h. einde v. den interglaciaaltijd en gedurende den 2en glaciaaltijd.	. . . .	*b*. Heidezand.	
III. Ouddiluvium, gevormd gedurende den 1en glaciaaltijd en aan het einde daarvan.	Morainen.	*c*. Keileem	
	Onderdil. zand en grind	*d*. Glac. gelaagd Skandinaafsch. *e*. Glac. gelaagd gemengd. *f*. Praeglaciaal.	Zand en grind.

Hierbij wordt door den schrijver aangemerkt, dat keileem (moraine) uit den 2en ijstijd niet aanwezig is. Met het oog hierop en op den aard der planten, waarvan overblijfselen in het heidezand gevonden zijn (Betula, Salix), zou men kunnen wenschen, de veronderstelling van een interglaciaal tijdvak door meer waarnemingen gestaafd te zien.

De beschrijving van het terrein is opgehelderd door eene geologische schetskaart der omstreken van Havelte en door verscheidene belangwekkende profielen, die den loop der lagen in den Bisschopsberg en in den Havelterberg moeten aanwijzen.

De ondergeteekenden zijn overtuigd, dat het stuk van den Heer van Cappelle als eene belangrijke bijdrage tot de kennis der diluviale lagen van den bodem van Nederland mag beschouwd en geschikt geacht worden voor bekendmaking in de Verhandelingen der Natuurkundige Afdeeling.

Delft, Th. H. BEHRENS.
Leiden, J. M. VAN BEMMELEN.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER **Dr. J. L. SIRKS,**

GETITELD:

„DE L'INFLUENCE DE LA DIFFRACTION PAR UN RÉSEAU À MAILLES RECTANGULAIRES, PLACÉ DEVANT L'OBJECTIF D'UNE LUNETTE, SUR LA CLARTÉ DE L'IMAGE PRINCIPALE D'UNE ÉTOILE."

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Januari 1892).



Daar het voor de vervaardiging der photographische kaart van den hemel wenschelijk was gebleken, een middel te bezitten waardoor de lichtsterkte van het beeld eener ster in eene bekende verhouding kan worden verkleind, werd in het vorige jaar besloten, dat de sterrenkundigen die aan dezen arbeid deelnemen zich zouden bedienen van zoo goed mogelijk aan elkander gelijke stukken metaalgaas, die voor het objectief van den kijker zouden worden geplaatst. Nadat deze schermen aan de verschillende sterrenwachten waren ontvangen werd hun verzwakkingscoefficient door een aantal waarnemers experimenteel bepaald, zoowel langs photometrischen weg als door het onderzoek van photographieën.

De Heer Sirks heeft getracht, den bedoelden coefficient uit de theorie der buigingsverschijnselen af te leiden. Niet alleen wordt n.l. de helderheid van het beeld in het hoofdbrandpunt van het objectief verminderd omdat het gaas een deel van de invallende stralen onderschept, maar bovendien wordt van de doorgedrongen lichtbeweging een gedeelte be-

steed tot de vorming der buigingsbeelden rondom het centrale beeld waarmede men alleen te doen heeft.

De schrijver vat bij zijne berekeningen het scherm op als een meetkundig vlak dat op sommige plaatsen wel en op andere niet doorschijnend is en beschouwt in de eerste plaats het geval van een gewoon traliescherm met even breede en regelmatig geplaatste spleten. Daarbij wordt nog aangenomen dat het werkzame deel zoowel van dit scherm als van het objectief begrensd wordt door een diaphragma met eene groote vierkante opening waarvan twee zijden evenwijdig aan de spleten zijn.

Aan de gewone theorie der diffractieverschijnselen wordt de uitdrukking voor de intensiteit in een willekeurig punt van het focale vlak ontleend. Was de zijde der zooeven genoemde opening ∞, dan zou 't beeld — bij enkelvoudig licht — bestaan uit 't centrale maximum en eene reeks van eveneens puntvormige maxima ter weerszijden daarvan op eene rechte lijn gelegen. In werkelijkheid wordt de zaak iets ingewikkelder; in plaats van elk puntvormig maximum komt een buigingsbeeld, zooals het door de vierkante opening op zich zelf ontstaan zou. Daar echter voor de waarneming elk dezer buigingsbeelden tot een enkel lichtvlekje ineensmelt wordt door eene integratie de totale hoeveelheid licht in elk vlekje opgemaakt. Die integratie geschiedt met behulp van eene reeksontwikkeling die hier voor het eerst wordt medegedeeld, die echter, zooals de Schrijver doet zien, voor het hoofddoel der berekening niet eens noodig is.

Nadat de uitkomst op de proef is gesteld door aan te toonen dat werkelijk de som van de lichthoeveelheden der verschillende vlekjes gelijk is aan de hoeveelheid licht die door de spleten dringt wordt de sterkte van het middelste beeldje nader beschouwd.

Dr. Sirks bewijst dat, indien de breuk p voorstelt welk gedeelte van het buigende vlak doorschijnend is, de breuk p^2 aangeeft hoeveelmaal kleiner de lichthoeveelheid van het centrale vlekje is dan zij bij weglating van 't traliescherm, maar bij gebruik van dezelfde vierkante opening zijn zou.

Deze stelling, die reeds door Lord Rayleigh was gevon-

den, blijkt thans ook in andere gevallen te gelden. Vooreerst wanneer men te doen heeft met rechthoekige openingen, overeenkomende met de mazen van het in werkelijkheid gebruikte gaas, en ten tweede wanneer bij 't gebruik daarvan de groote vierkante opening door eene ronde opening, b.v. die van het objectief zelf, wordt vervangen. Experimenteel en theoretisch wordt aangetoond dat in dit laatste geval elk puntvormig maximum waarmede men te doen zou hebben als 't gaas voor een objectief van zeer groote middellijn geplaatst was, vervangen wordt door een buigingsbeeld, zooals het door de opening van het objectief op zich zelf ontstaat, een beeld dus met cirkelvormige ringen, dat evenwel weer als een enkel lichtvlekje wordt waargenomen.

Verder wordt uiteengezet, waarom de verzwakkingscoefficient niet, zooals sommigen gemeend hebben, door chromatische of spherische aberratie kan gewijzigd worden, of door de omstandigheid dat de peripherische en centrale deelen van het objectief het licht in ongelijke mate absorbeeren. Wat het eerste punt betreft valt op te merken dat de waarde p^2 van den verzwakkingscoefficient onafhankelijk is van de golflengte en dus ook voor samengesteld licht geldt.

Ten slotte worden de uitkomsten medegedeeld van eenige metingen die de schrijver aan een stuk van het aan de sterrenwachten verstrekte gaas heeft verricht. De afstand der kettingdraden, van midden tot midden, was 0.4360 mM. De dikte dezer draden werd bepaald naar eene vernuftige methode, op de diffractie door het gaas zelf berustende; er werd voor gevonden 0.1624 mM. De inslagdraden waren volgens metingen van den schrijver zelf en den Heer Kapteyn 0.0168 mM. dunner, terwijl de afstand dezer draden, van midden tot midden, 0.3380 mM. bedroeg. Uit deze gegevens wordt voor den theoretischen verzwakkingscoefficient gevonden $\frac{1}{7.84}$, hetgeen wil zeggen dat het getal dat de grootteklasse eener ster voorstelt, door 't gebruik van het gaas met 2.24 toeneemt. Wij vermelden hierbij dat, naar de bedoeling van het internationale comité, dit getal 2 had moeten zijn, en dat, te oordeelen naar photometrische be-

palingen, te Potsdam verricht, het gaas ook aan dezen eisch voldeed, maar dat de meeste elders uitgevoerde metingen tot grootere getallen, 2,5 à 2,8, geleid hebben.

Van den theoretischen kant is, althans wanneer men de uiterste nauwkeurigheid verlangt, de zaak door het onderzoek van den Heer SIRKS niet uitgeput. Een uit metaaldraden van zekere dikte samengesteld gaas geeft, wat de helderheid der beelden betreft, niet dezelfde uitwerking als een meetkundig vlak met openingen die met de mazen overeenkomen. Op eene wijze die aan eene nauwkeurige theorie ontsnapt en van de gesteldheid van het oppervlak der draden afhangt, zullen de lichtgolven de draden omspoelen en in een vlak, onmiddellijk achter het gaas, zal de verdeeling der lichttrillingen niet geheel dezelfde zijn als in het meermalen genoemde denkbeeldige scherm zonder dikte. Dat deze kleine bijzonderheden een merkbaren invloed kunnen hebben, blijkt uit de onderzoekingen over de diffractie van het gepolariseerde licht. Daaruit heeft men geleerd dat de trillingsrichting van een der doorgelaten lichtbundels in den regel een anderen hoek maakt met het buigingsvlak dan de trillingsrichting van het invallende licht en dat dus de intensiteit der lichtmaxima in 't focale vlak der lens afhankelijk is van den polarisatietoestand der invallende stralen. Daar nu de eenvoudige formules waarvan de Heer SIRKS uitgaat, niets van eene dergelijke afhankelijkheid bevatten, kunnen de daarmede berekende intensiteiten niet volkomen nauwkeurig zijn.

Eveneens kan in de bepaling van de dikte der draden uit de waarneming der buigingsbeelden eene kleine fout zijn ingeslopen, daar ook bij de daartoe strekkende proeven het scherm zich niet volkomen gedraagt als een denkbeeldig scherm zonder dikte.

Wij voegen er aanstonds bij dat de goede overeenstemming tusschen de onder verschillende omstandigheden voor de dikte verkregen uitkomsten onze vrees voor de laatstgenoemde fouten bijna wegneemt en dat wij ook geneigd zijn te verwachten dat de fouten in de berekende lichtintensiteiten uit

een praktisch oogpunt van geene beteekenis zullen zijn. In elk geval willen wij er allerminst den schrijver een verwijt van maken dat hij niet het uiterst moeilijke vraagstuk heeft opgelost, waartoe men geleid wordt, als men den werkelijken aard van het gebezigde gaas tot in bijzonderheden in rekening wil brengen.

Veeleer zijn wij dankbaar voor deze interessante bijdrage van een letterkundige tot een natuurkundig vraagstuk dat ook voor de astronomie van eenig gewicht is geworden en stellen gaarne voor de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen.

H. A. LORENTZ.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

DE L'INFLUENCE DE LA DIFFRACTION

PAR UN

RESEAU À MAILLES RECTANGULAIRES,

PLACÉ DEVANT L'OBJECTIF D'UNE LUNETTE,

SUR LA

CLARTE DE L'IMAGE PRINCIPALE D'UNE ETOILE.

PAR LE Dr. J. L. SIRKS.



Dans sa séance du 3 Avril 1891 le Comité international permanent pour l'exécution de la carte photographique du ciel adopta la proposition de M. Kapteyn, de distribuer aux observatoires participants des écrans métalliques à mailles absolument identiques, lesquels placés devant l'objectif d'une lunette diminueraient la grandeur d'une étoile de deux unités.

Depuis lors M. Scheiner a pu envoyer à ces observatoires des écrans identiques, qui lui paraissaient donner l'absorption voulue à un degré suffisant d'approximation, et plusieurs savants se sont efforcés de déterminer le coefficient d'absorption, ou plutôt le coefficient de transparence de ces réseaux, qui devait être $\frac{1}{6.30}$, par le moyen de mesures photographiques. D'autre part il paraît qu'on n'a pas encore tâché de déduire ce coefficient des dimensions du réseau à l'aide des formules de diffraction, qui cependant devaient être parfaitement applicables en cette matière. Dans ces circonstances

il ne me paraissait pas être hors de saison de m'occuper de la partie théorique du problème, ce qui m'a conduit à un résultat bien plus simple que je n'osais l'espérer. En même temps j'ai pu rassembler quelques détails sur les écrans distribués, que je me permettrai de communiquer à la fin de mon travail.

Il s'agit de déterminer la diminution de grandeur de l'image principale de l'étoile par l'écran, diminution occasionnée d'abord par l'obstruction partielle de l'objectif, ensuite par la perte de la lumière dérivée dans les directions où se forment les spectres latéraux. Commençons par énoncer la loi très simple qui régit le phenomène. Soit p le coefficient de transparence générale du réseau, c'est-à-dire le rapport de l'aire de la partie ouverte à l'aire totale, alors *la partie de la lumière incidente, qui se réunit dans l'image centrale est indiquée par* p^2. La dégradation occasionnée par l'obstacle matériel de l'écran se répète exactement derrière l'écran par suite de la diffraction; elle est indépendante de λ.

Pour simplifier la démonstration considérons d'abord l'action d'un réseau ordinaire à traits *), placé devant l'objectif d'une lunette, dont la distance focale soit 1; cela fait, la transition au réseau à mailles rectangulaires ne présentera guère de difficulté.

Soit a la largeur de chacune des n fentes, d l'épaisseur d'une barre, $e = a + d$ la somme d'un vide et d'un plein, ce qu'on pourrait appeler la période du réseau; enfin $p = \frac{a}{e}$ le rapport du vide à la période, mesure de la transparence générale de l'écran. La longueur des fentes peut

*) Dans ces derniers jours je viens de voir que la question de la distribution de la lumière avec le réseau simple a été résolue par M. Rayleigh (*Encyclop. Brit.* XXIV pag. 437). Cependant j'ai cru pouvoir conserver cette partie de mon travail, parce que M. Rayleigh a établi son résultat par la synthèse, tandis que moi je me suis servi de l'analyse. A ma connaissance le développement de $\int I\,dx$ ne se rencontre nulle part.

rester hors de considération, parce qu'elle n'affecte pas l'intensité I relative des spectres; seulement la longueur sera uniforme, et afin que cela soit possible, délimitons le réseau et l'objectif par un écran à ouverture carrée.

Une formule bien connue donne pour l'intensité de la lumière d'une étoile diffractée par notre réseau simple

$$I = a^2 \frac{\sin^2 \pi a \lambda^{-1} x}{\pi^2 a^2 \lambda^{-2} x^2} \cdot \frac{\sin^2 n \pi e \lambda^{-1} x}{\sin^2 \pi e \lambda^{-1} x}, \quad \ldots \ldots (1)$$

x étant l'abscisse d'un point quelconque situé sur l'axe $O X$ du plan focal, dans lequel l'axe $O Y$ est orienté suivant la longueur des fentes, tandis que l'intersection O des axes se trouve dans l'axe de la lunette, dirigée vers l'étoile que nous supposerons monochromatique. L'unité de l'intensité conviendra à la lumière envoyée par une seule fente de la largeur 1 vers le point $x = 0$. Rappelons que, dès que le nombre n des fentes devient un peu grand, le premier facteur fractionnaire et le dénominateur du second peuvent être regardés comme sensiblement constants par rapport au dernier numérateur; que par conséquent les lieux x des maxima de I dépendent presque uniquement des maxima du second numérateur, qui atteint ses plus grandes valeurs pour $\sin n \pi e \lambda^{-1} x = \pm 1$; que parmi ces petits maxima, très rapprochés l'un de l'autre, et presque tous extrêmement faibles, on trouve les grands maxima avec $x = \frac{\lambda}{e} \times 0, 1, 2, 3 \ldots$ où le numérateur et le dénominateur du dernier facteur de (1) s'annulent en même temps, en assurant à ces maxima l'intensité

$$I = a^2 \frac{\sin^2 \pi a \lambda^{-1} x}{\pi^2 a^2 \lambda^{-2} x^2} \cdot n^2 \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

c'est-à-dire successivement à partir de O:

$$I_O = n^2 a^2, \qquad I_A = I_O \frac{\sin^2 \pi p}{\pi^2 p^2}, \qquad I_B = I_O \frac{\sin^2 2 \pi p}{4 \pi^2 p^2},$$

$$I_C = I_O \frac{\sin^2 3\pi p}{9\pi^2 p^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ajoutons que les grands maxima absorbent les deux petits maxima les plus rapprochés. Comme on le voit la valeur définitive de ces intensités dépend en dernier ressort du module $p = \frac{a}{e}$, qui détermine le caractère du réseau. Elle deviendra nulle pour ceux des spectres dont le numéro d'ordre est un multiple entier de $\frac{1}{p}$, ou lui est égal: avec un réseau au $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire $p = \frac{2}{5}$, ce sont les grands spectres latéraux 5, 10, 15... qui s'évanouissent.

Mais après tout, ce qui nous intéresse ici en fin de compte ce n'est pas *l'intensité* I des formules, qui réprésente le carré de l'amplitude des vibrations arrivant en chaque point du tableau; ce sera plutôt la *quantité totale Q de la lumière* dans chaque bande. Pour l'obtenir il faudrait calculer toutes les valeurs $\int I\,dx$ entre deux limites consécutives répondantes aux minima, qui délimitent la frange en considération. En prenant la somme de ces intégrales, ou bien $\int_{-\infty}^{\infty} I\,dx$, on obtiendrait une expression pour la quantité totale $Q_{-\infty}^{\infty}$ de la lumière transmise par le réseau, puisque d'après un theorème connu la diffraction n'a ni pu l'augmenter ni la faire décroître. En divisant par cette Q totale la quantité de lumière Q_O réunie dans la bande centrale O nous trouverions le coefficient d'affaiblissement qui nous occupe. Mais comme l'intégration prise dans ce sens général n'aboutirait guère, faisons quelques concessions qui nous permettront d'obtenir un résultat satisfaisant.

En effet, dès que le nombre n des traits du réseau simple devient assez considérable, et dans notre réseau il monte à plusieurs centaines, tout ce qui reste du phénoméne ce sont les grands maxima . . . C, B, A, O, A, B, C. . . répartis

à des intervalles $\frac{\lambda}{e}$ égaux assez grands, à gauche et à droite de l'image principale O; puis des deux côtés de chacun d'eux un très petit nombre de maxima de troisième classe Oa, Ob, Oc, Od......, Aa, Ab, Ac...., Ba, Bb....., Ca..., tout au plus une vingtaine d'une intensité rapidement décroissante, et discernables seulement à l'aide d'un grossissement, qui suffirait pour montrer les petits cercles environnant l'image d'une étoile observée avec la même lunette sans réseau. Or pour l'observateur et pour la plaque photographique ces images accessoires se confondent avec les grands maxima qu'elles accompagnent, et il est facile de démontrer que la quantité totale de lumière Q_O, Q_A, Q_B, Q_C... de chacune de ces bandes avec ses satellites est proportionelle à l'intensité I_O, I_A..... des maxima, parce que pour chaque groupe O, A, B.... la largeur des franges et la loi suivant laquelle la lumière y est distribuée est la même.

En effet, prenons dans les groupes successifs des points arbitraires mais correspondants, situés à une distance x_1 à droite des grands maxima, et cherchons une valeur suffisamment approximative pour l'intensité dans ces points. Puisque dans les grands maxima eux-mêmes $x = 0, \frac{\lambda}{e}, \frac{2\lambda}{e}, \frac{3\lambda}{e}\ldots$ les abscisses de nos nouveaux points seront $x = x_1$, $\frac{\lambda}{e} + x_1$, $\frac{2\lambda}{e} + x_1$....., d'où découle $n\pi e\lambda^{-1}x = n\pi e\lambda^{-1}x_1$, $n\pi + n\pi e\lambda^{-1}x_1$, $2n\pi + n\pi e\lambda^{-1}x_1$..... ou bien $= \varphi$, $n\pi + \varphi$, $2n\pi + \varphi$....; $\varphi = n\pi e\lambda^{-1}x_1$ désignant un arc, qui ne pourra valoir qu'un nombre de demi-circonférences égal au nombre très restreint des satellites perceptibles. En même temps $\pi e\lambda^{-1}x = \frac{\varphi}{n}$, $\pi + \frac{\varphi}{n}$, $2\pi + \frac{\varphi}{n}$......., et $\sin^2 \pi e\lambda^{-1}x = \frac{\varphi^2}{n^2}$ puisque $\frac{\varphi}{n}$ ne contiendra qu'un très petit nombre de dégrés. En outre le facteur $\frac{\sin^2 \pi a\lambda^{-1}x}{n^2 a^2 \lambda^{-2} x^2}$, bien

que très différent pour les divers groupes, pourra être regardé comme constant entre les limites $+x_i$ et $-x_i$ d'un même groupe. En reportant ces diverses valeurs dans la formule (1) nous obtenons

$$I = a^2 \frac{\sin^2 \pi a \lambda^{-1} x}{\pi^2 a^2 \lambda^{-2} x^2} \cdot n^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2},$$

ou bien en ayant égard à (3)

$$I = I_O, \ I_A, \ I_B \ldots \times \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2}$$

et

$$Q = \int I\, dx = I_O, \ I_A, \ I_B \ldots \times \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2}\, dx_i,$$

ou, puisque $d\varphi = n \pi e \lambda^{-1} dx_i$

$$Q = I_O, \ I_A, \ I_B \ldots \times \frac{\lambda}{n \pi e} \int \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2}\, d\varphi.$$

Pour les bandes principales de chaque groupe les limites de l'intégrale seront $\varphi = \pi$ et $-\pi$; pour les premiers satellites à droite et à gauche $\varphi = 2\pi$ et π ou $\varphi = -\pi$ et -2π, ce qui revient au même; puis viennent 3π et 2π, 4π et 3π, et ainsi de suite. En développant $\frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2} = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2\varphi^2}$ en série et en intégrant, on obtient

$$\int \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2}\, d\varphi = \varphi - \frac{2^3 \varphi^3}{1.2.3^2.4} + \frac{2^5 \varphi^5}{1.2.3.4.5^2.6} - \ldots,$$

série convergente, mais peu commode pour $\varphi > \pi$. Pour les valeurs plus grandes de φ il vaut mieux intégrer par parties, ce qui donne

$$\int \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2} d\varphi = C - \frac{1}{2\varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2^2 \varphi^2} + \frac{3.4.5}{2^4 \varphi^4} - \frac{3.4.5.6.7}{2^6 \varphi^6} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{\cos 2\varphi}{4\varphi^3}\left(1 - \frac{3.4}{2^2 \varphi^2} + \frac{3.4.5.6}{2^4 \varphi^4} - \ldots\right)$$

et puisque pour nos limites, avec $\varphi = m\pi$, $\sin 2\varphi = 0$, $\cos 2\varphi = 1$

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}\, d\varphi = C - \frac{1}{2m\pi} + \frac{1}{4m^3\pi^3}\left(1 - \frac{3.4}{2^2 m^2 \pi^2} + \frac{3.4.5.6}{2^4 m^4 \pi^4} - \ldots\right).$$

Passons à l'intégrale définie:

$$\int_{m\pi}^{\infty} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varphi^2} = \frac{1}{2\, m\pi} - \frac{1}{4m^3\pi^3}\left(1 - \frac{3.4}{2^2 m^2 \pi^2} + \frac{3.4.5.6}{2^4 m^4 \pi^4} - \ldots\right)$$

et comme

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\varphi^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{m\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\varphi^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\, m\pi} + \frac{1}{4\, m^3\, \pi^3}\left(1 - \frac{3.4}{2^2 m^2 \pi^2} + \ldots\right).$$

Ces séries sont semi-convergentes; comme on le voit dans la table suivante, dès la 4me frange la valeur $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\, m\, \pi}$ donne déjà une approximation remarquable. Rappelons encore que la bande centrale de chaque groupe est unique, tandisque les bandes plus faibles se voient deux fois: à gauche et à droite. Voici la valeur des intégrales:

	Valeur de $\int$.	Valeur de $\int / \pi$.	Valeur approx.
$\int_{-\pi}^{\pi}$	2.8363	0.9028	$1 - \frac{1}{\pi^2} = 0.8987$
$2\int_{\pi}^{2\pi}$	0.1480	0.0471	$\frac{1}{1.2.\pi^2} = 0.0507$
$2\int_{2\pi}^{3\pi}$	0.0518	0.0165	$\frac{1}{2.3.\pi^2} = 0.0169$
	3.0361	0.9664	

	Valeur de $\int$.	Valeur de $\int / \pi$.	Valeur approx.
	3.0361	0.9664	
$2\int_{3\pi}^{4\pi}$	0.0262	0.0084	$\frac{1}{3.4.\pi^2} = 0.0084$
$2\int_{4\pi}^{5\pi}$	0.0158	0.0050	$\frac{1}{4.5.\pi^2} = 0.0051$
$2\int_{5\pi}^{6\pi}$	0.0105	0.0033	$\frac{1}{5.6.\pi^2} = 0.0034$
$2\int_{6\pi}^{7\pi}$	0.0076	0.0024	$\frac{1}{6.7.\pi^2} = 0.0024$
. . . . .			
$2\int_{7\pi}^{\infty}$	0.0454	0.0145	$\frac{1}{7}\pi^2 = 0.0145.$
$\int_{-\infty}^{\infty}$	3.1416	1.	

Le table montre que depuis la quatrième intégrale les Q sont de moins d'un centième de la Q principale; cependant, comme ces petits maxima d'un numéro d'ordre plus élevé contribuent à la clarté des grands maxima avec lesquels ils se confondent, il convient de ne pas les négliger; nous pourrons même étendre les limites de l'intégration à ∞ et $-\infty$ pour recueillir toute la lumière diffractée. En adoptant ces limites nous obtenons pour la quantité de lumière collective dans les groupes successifs:

$$Q_O = I_O \times \frac{\lambda}{n\pi e}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2}d\varphi = \frac{a^2 n\lambda}{e} = p^2 n e \lambda$$

$$Q_A = I_A \times \quad » \quad » \quad = p^2 n e \lambda \left(\frac{\sin \pi p}{\pi p}\right)^2$$

$$Q_B = I_B \times \quad » \quad » \quad = p^2 n e \lambda \left(\frac{\sin 2\pi p}{2\pi p}\right)^2, \text{ etc.}$$

La somme de toutes ces quantités, c'est-à-dire l'illumination totale dans le plan focal sera donnée par

$$Q_{-\infty}^{\infty}=p^2ne\lambda\left[1+2\left(\frac{\sin\pi p}{\pi p}\right)^2+2\left(\frac{\sin 2\pi p}{2\pi p}\right)^2+3\left(\frac{\sin 3\pi p}{3\pi p}\right)^2+\ldots\right]$$
$$=p^2ne\lambda\left[1+\left(\frac{1}{p}-1\right)\right]=pne\lambda,$$

quelle que soit la distribution de la lumière parmi les groupes *).

Si l'ouverture recouverte par l'écran, en gardant la même largeur, était tout-à-fait libre, c'est-à-dire $d=0$, $p=1$, ou aurait $Q'=ne\lambda$.

La valeur des trois quantités Q', $Q_{-\infty}^{\infty}$ Q_O, qui est de $ne\lambda$, $pne\lambda$, $p^2ne\lambda$ démontre qu'avec un réseau simple, tout comme l'obstacle matériel des barres ne laisse passer que la partie p de la lumière incidente, la diffraction à son tour ne laisse à la frange centrale que la partie p de la lumière transmise, on p^2 de la lumière arrivant à l'écran.

Maintenant passons à l'écran carré à $n_1\,n_2$ mailles rectangulaires. Une seule ouverture $a_1\,a_2$ donne dans le plan focal de la lunette aplanétique une image dont l'intensité dans un point (x, y) dépend de la formule connue

*) La différence des deux sommations connues:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\cos 2a+\frac{\cos 4a}{2^2}+\frac{\cos 6a}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}-\pi a+a^2$$

donne

$$2\sin^2 a+\frac{2\sin^2 2a}{2^2}+\frac{2\sin^2 3a}{3^2}+\ldots=\pi a-a^2.$$

En remplaçant a par πp on trouve

$$2\sin^2\pi p+\frac{2\sin^2 2\pi p}{2^2}+\frac{2\sin^2 3\pi p}{3^2}\ldots=\pi^2 p-\pi^2 p^2$$

ou

$$2\left(\frac{\sin\pi p}{\pi p}\right)^2+2\left(\frac{\sin 2\pi p}{2\pi p}\right)^2+2\left(\frac{\sin 3\pi p}{3\pi p}\right)^2\ldots=\frac{1}{p}-1.$$

$$\sqrt{I} = a_1\, a_2 \frac{\sin \pi\, a_1\, \lambda^{-1}\, x}{\pi\, a_1\, \lambda^{-1}\, x} \cdot \frac{\sin \pi\, a_2\, \lambda^{-1}\, y}{\pi\, a_2\, \lambda^{-1}\, y}.$$

Pour passer de l'ouverture unique à toute une série d'ouvertures parallèle à l'axe OX il faut ajouter à cette fonction le facteur $\frac{\sin n_1\, \pi\, e_1\, \lambda^{-1}\, x}{\sin \pi\, e_1\, \lambda^{-1}\, x}$; enfin la juxtaposition de n_2 séries parallèles à la première comportera l'addition d'un nouveau facteur $\frac{\sin n_2\, \pi\, e_2\, \lambda^{-1}\, y}{\sin \pi\, e_2\, \lambda^{-1}\, y}$. La multiplication des divers facteurs, mais arrangés dans un ordre un peu différent, nous donne pour l'intensité I de la lumière envoyée par le réseau vers un point quelconque du tableau

$$\sqrt{I} = a_1 \frac{\sin \pi\, a_1 \lambda^{-1} x}{\pi\, a_1\, \lambda^{-1}\, x} \cdot \frac{\sin n_1 \pi\, e_1 \lambda^{-1} x}{\sin \pi\, e_1\, \lambda^{-1}\, x} \times a_2 \frac{\sin \pi\, a_2 \lambda^{-1} y}{\pi\, a_2\, \lambda^{-1}\, y} \cdot \frac{\sin n_2 \pi\, e_2 \lambda^{-1} y}{\sin \pi\, e_2\, \lambda^{-1}\, y},$$

et pour l'intensité des grands maxima

$$\sqrt{I} = a_1 \frac{\sin \pi\, a_1\, \lambda^{-1}\, x}{\pi\, a_1\, \lambda^{-1}\, x}\, n_1 \times a_2 \frac{\sin \pi\, a_2\, \lambda^{-1}\, y}{\pi\, a_2\, \lambda^{-1}\, y}\, n_2.$$

La formule démontre que, comme on pouvait le prévoir, l'action du réseau à mailles rectangulaires ne diffère aucunement de celle qui serait exercée par deux réseaux simples, placés l'un après l'autre dans le faisceau de lumière parallèle incidente. Le premier soustrait à la lumière p_1 qu'il transmet, la partie $1 - p_1$ requise pour les spectres latéraux qui vont se former sur l'axe OX, et qui pourraient être regardés comme les images de nouvelles sources virtuelles de lumière juxtaposées des deux côtés à l'étoile elle même, réduite à la clarté p_1^2; ensuite le second réseau, orienté suivant une direction normale à la précédente, développe l'image de l'étoile et de ses parhélies avec leurs satellites virtuels en séries d'images parallèles à la première série. Seulement ce deuxième réseau à son tour ne laissera aux images de la série primaire que la partie p_2^2 de leur lumiére, de sorte que l'image centrale dont la clarté était amoindrie à p_1^2 sera réduite à la quantité $p_1^2\, p_2^2 = \frac{a_1^2\, a_2^2}{e_1^2\, e_2^2}$.

Reste encore à débarrasser la lunette avec son réseau

de l'écran à ouverture carrée dont nous l'avons encombrée. Pour que notre loi subsiste il est nécessaire que les deux conditions trouvées ci-dessus restent remplies:

1°. que la quantité de lumière réunie dans chaque grand maximum avec ses satellites soit en rapport constant avec l'intensité I du maximum même; autrement: que la loi de distribution de la lumière à l'entour des grands maxima soit identique pour tous; 2°. que l'intensité centrale I_0 continue à représenter la partie $p_1 p_2$ de la somme de toutes les intensités dans ces maxima.

Ad 1um. Avec le réseau simple les satellites, toujours en petits nombres, étaient rangés des deux côtés des grands maxima sur une seule ligne; avec le réseau carré ils étaient rangés à l'entour, sur des lignes parallèles à OX et OY; en disposant l'ouverture carrée, qui délimite le réseau, en sorte que les diagonales soient dirigées suivant ces axes, on trouve que la disposition générale des parhélies reste la même, mais que les systèmes de leurs satellites ont tourné de 45°. Bref, tandisque la disposition générale des parhélies dépend de la disposition des petites ouvertures dans le réseau, celle des satellites dans leurs systèmes rappelle la diffraction produite par la grande ouverture de l'écran. Aussi, avec l'ouverture circulaire de la lunette, les satellites affectent-ils la forme circulaire des petits anneaux produits par l'objectif libre. Ceci peut être démontré par l'expérience. L'étoile monochromatique introuvable peut être remplacée par la lumière solaire, passée au spectroscope et limitée par un très petit trou, placé au foyer de la lunette de cet instrument, privée de son oculaire. Une lunette placée à 15 mètres de distance du petit trou, et munie d'un réseau circulaire ($r = 10$ mm) présentant environ 280 ouvertures carrées, me montre l'image de diffraction ci-jointe, (fig. 1) mais dans laquelle les petits disques lumineux placés vers le centre sont entourés de 1 à 4 anneaux circulaires, savoir les 13 disques O, A, B, D, sur les lignes XX' et YY', et les quatre disques placés en quinconce à l'entour de O. Comme la lumière solaire est beaucoup affaiblie par la dispersion des prismes, les disques plus éloignés du

centre sont trop faibles pour montrer leurs anneaux. Les disques C' et F font défaut avec bon nombre d'autres parce qu'ils se trouvent dans les voies obscures correspondant aux valeurs de x et de $y = \frac{\lambda}{a}, \frac{2\lambda}{a}, \frac{3\lambda}{a}. \ldots \ldots$ Si le réseau offrait des ouvertures circulaires, ces voies obscures deviendraient circulaires à leur tour.

Ad 2um. Dans les grands maxima, qui occupent les mêmes endroits qu'avec l'écran à ouverture carrée, les phases de tous les rayons correspondants provenant des $\frac{n_1 n_2 \pi}{4}$ ouvertures sont d'accord, et l'expression générale assez compliquée de l'intensité doit se réduire à

$$\sqrt{I} = a_1 a_2 \frac{\sin \pi a_1 \lambda^{-1} x}{\pi a_1 \lambda^{-1} x} \cdot \frac{\sin \pi a_2 \lambda^{-1} y}{\pi a_2 \lambda^{-1} x} \cdot \frac{n_1 n_2 \pi}{4}$$

justement comme avec l'ouverture carrée au facteur $\frac{\pi}{4}$ près; ce qui prouve que l'intensité et la quantité de lumière relatives des images successives sont les mêmes dans les deux cas; par suite, que l'image centrale contiendra encore ici la partie $p_1 p_2$ de toute la lumière qui est passée par le réseau, ou bien $p_1^2 p_2^2$ de la lumière incidente.

Quelques astronomes ont émis l'opinion qne l'action du réseau serait différente pour les réfracteurs et les réflecteurs, ou bien qu'elle serait affectée d'une manière notable par certains défauts de chromatisme, d'absorption inégale des verres, d'aberration sphérique, inévitables mêmes avec de bonnes lunettes. Quant à l'achromatisme il suffit de rappeler que la distribution de la lumière parmi les spectres est absolument indépendante de la couleur.

L'absorption du verre peut devenir compromettante avec les écrans à ouverture libre mais de diamètre variable, qu'on emploie quelquefois, parce que la partie centrale de l'objectif offre une grande épaisseur de crown avec une faible épaisseur de flint, tandisque les bords de la lentille présentent la proportion inverse. Avec le réseau l'effet de cette inégalité disparaît en même temps que les défauts possibles

d'aberration sphérique; à la verité chaque cM[2] du réseau avec ses 679 ouvertures, en quelque endroit de l'objectif qu'on le choisisse, distribue la lumière, qu'il laisse passer, suivant la même loi sur tous les spectres. En plaçant un verre rouge ordinaire devant une lunette à ouverture libre de 6 cM., je vois l'image bien définie d'une étoile artificielle de lumière solaire se transformer en un amas bizarre de petites taches plus ou moins claires, disseminées et enchevêtrées sur un espace polygone de 1′ à 2′, comme je devais m'y attendre. Evidemment c'était un cas d'aberration sphérique monstrueuse. Or en appliquant le réseau ou voyait que toutes ces taches se répétaient en une configuration identique dans chacune des images diffractées. Un carton à petite ouverture promené devant le réseau isolait une seule tache avec son cortège de parhélies du reste, qui disparut dans les spectres tout comme dans l'image principale. D'où il résulte que des défauts d'aberration même assez graves ne sauraient affecter la diffraction comme telle; ils ne parviendraient qu'à défigurer les images diffractées et leurs satellites, absolument comme ils défigurent l'image unique avec ses anneaux, formée par l'objectif libre, mais le rapport des intensités sera respecté.

Je dois encore prouver par l'analyse ce qui a été avancé ci-dessus sur la foi d'une expérience par rapport à la figure de diffraction du réseau rond à mailles rectangulaires. Nous pourrons trouver l'expression générale pour I en employant la même approximation qu'avec le réseau linéaire (pag. 311) et en introduisant certaine simplification requise par la pratique.

Disposons le réseau en sorte que le diamètre $Y\,Y'$ de 'objectif coïncide avec une rangée de n_2 ouvertures à période e_2, tandisque le diamètre $X\,X'$ se trouve juste au milieu entre deux rangées de n_1 ouvertures à periode e_1. Le nombre des ouvertures contenues dans une série $L\,N$ (fig. 2) sera $n_2 \cos \varrho$; pour cette série nous aurons, en posant

$$a_1\, a_2 \frac{\sin \pi\, a_1\, \lambda^{-1} x}{\pi\, a_1\, \lambda^{-1} x} \cdot \frac{\sin \pi\, a_2\, \lambda^{-1} y}{\pi\, a_2\, \lambda^{-1} y} = P$$

$$\sqrt{I_{\prime}} = P \cdot \frac{\sin (n_2 \cos \varrho \,.\, \pi\, e_2\, \lambda^{-1} y)}{\sin \pi\, e_2\, \lambda^{-1} y}.$$

La différence de phase de cette série avec la série centrale sera

$$\zeta = \xi\,\lambda^{-1}\,2\,\pi\,x = R\,sin\,\varrho\,\lambda^{-1}\,2\,\pi\,x = \frac{n_1\,sin\,\varrho}{2}\,2\,\pi\,e_1\,\lambda^{-1}\,x,$$

dans lequel $\frac{n_1\,sin\,\varrho}{2}$, qui est le nombre des ouvertures depuis O jusqu' à M, devra être un nombre entier, tout comme $\frac{n_2\,cos\,\varrho}{2}$, qui représente le nombre des ouvertures dans la demi-série MN: les quelques centaines d'ouvertures qui seront recouvertes en partie par le bord de l'objectif, tout en compliquant singulièrement la fonction de diffraction, contribuent extrêmement peu à l'illumination du tableau, et peuvent être laissées hors de considération vis-à-vis des 580.000 ouvertures de l'écran entier. Les grands maxima se trouveront, comme avec l'ouverture carrée, là où on aura en même temps $x = \frac{m_1\,\lambda}{e_1}$ et $y = \frac{m_2\,\lambda}{e_2}$, m_1 et m_2 étant des nombres entiers.

Maintenant prenons un point quelconque S (fig. 3) très proche d'un de ces maxima, déterminé par les coordonnées $x = \frac{m_1\,\lambda}{e_1} + x_,$ et $y = \frac{m_2\,\lambda}{e_2} + y_,$; nous aurons

$$sin\,(n_2\,cos\,\varrho . \pi\,e_2\,\lambda^{-1} y) = sin\left(m_2 . \frac{n_2\,cos\,\varrho}{2} . 2\,\pi + n_2\,cos\varrho . \pi\,e_2 \lambda^{-1}\,y_,\right)$$
$$= sin\,(n_2\,cos\,\varrho\,.\,\pi\,e_2\,\lambda^{-1}\,y)$$

puisque m_2 et $\frac{n_2\,cos\,\varrho}{2}$ sont des nombres entiers; de même

$$cos\,\zeta = cos\,(n_1\,sin\,\varrho\,.\,\pi\,e_1\,\lambda^{-1}\,x)$$

$$= cos\left(m_1 . \frac{n_1 sin\,\varrho}{2} . 2\pi + n_1\,sin\,\varrho . \pi\,e_1 \lambda^{-1} x_,\right) = cos(n_1 sin\varrho . \pi e_1 \lambda^{-1} x_,).$$

En même temps

$$sin\,\pi\,e_2\,\lambda^{-1}\,y = sin\,(m_2\,\pi + \pi\,e_2\,\lambda^{-1}\,y_,) = sin\,\pi\,e_2\,\lambda^{-1}\,y_,$$

avec le signe + ou — selon que m_2 est pair ou impair; cependant ce signe peut être négligé, parce que I dépend du carré du sinus.

Or en multipliant la valeur $\sqrt{I_{\prime}}$ pour chaque série par $\cos\zeta$, et en prenant la somme des produits nous obtiendrons $\sqrt{I}$ pour tout l'écrau, c'est à dire

$$\sqrt{I} = \Sigma P . \frac{\sin (n_2 \cos\varrho \, . \, \pi e_2 \lambda^{-1} y_{\prime})}{\sin \pi e_2 \lambda^{-1} y_{\prime}} . \cos (n_1 \sin\varrho \, . \, \pi e_1 \lambda^{-1} x_{\prime}).$$

Ecrivons encore

$$n_1 \pi e_1 \lambda^{-1} x_{\prime} = 2 R \pi \lambda^{-1} x_{\prime} = \varphi$$

et

$$n_2 \pi e_2 \lambda^{-1} y_{\prime} = 2 R \pi \lambda^{-1} y_{\prime} = \psi,$$

d'où

$$\sin \pi e_2 \lambda^{-1} y_1 = \sin \frac{\psi}{n_2} = \frac{\psi}{n_2}$$

puisque $\frac{\psi}{n_2}$ ne peut atteindre qu'un petit nombre de degrés; alors

$$\sqrt{I} = \Sigma P . \frac{n_2 \sin (\psi \cos\varrho)}{\psi} . \cos (\varphi \sin\varrho).$$

Cette somme, qui doit être prise entre les limites $\varrho = + \frac{\pi}{2}$ et $\varrho = - \frac{\pi}{2}$, peut être effectuée au moyen d'une quadrature. En effet considérons chaque valeur $\Delta \sqrt{I} = \sqrt{I_{\prime}} \cos\zeta$ comme une ordonnée, qui dépend de ξ comme abscisse; les ordonnées seront équidistantes, avec l'intervalle $\Delta \xi = e_1$. En multipliant chaque ordonnée avec $\Delta \xi$ nous aurons l'expression d'une aire, qui à son tour, après être divisée par e_1, représentera la valeur de la somme cherchée. Donc

$$\sqrt{I} = \frac{n_2}{e_1} . P . \Sigma \frac{\sin (\psi \cos\varrho)}{\psi} \cos (\varphi \sin\varrho) \Delta \xi,$$

ou bien, puisque

$$\Delta \xi = R \cos \varrho \, \Delta \varrho = \frac{n_1 e_1}{2} \cos \varrho \, \Delta \varrho$$

$$\sqrt{I} = \frac{n_1 n_2}{2} . P . \Sigma \frac{\sin (\psi \cos \varrho)}{\psi} \cos (\varphi \sin \varrho) \cos \varrho \, \Delta \varrho .$$

Comme les valeurs successives des ordonnées sont extrêmement peu différentes, nous pourrons passer des différences aux différentielles:

$$\sqrt{I} = \frac{n_1 n_2}{2} . P . \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (\psi \cos \varrho)}{\psi} \cos (\varphi \sin \varrho) \cos \varrho \, d \varrho ,$$

expression dans laquelle on reconnaîtra une fonction Bessélienne. En développant le produit de $\frac{\sin (\psi \cos \varrho)}{\psi}$ et $\cos (\varphi \sin \varrho) \cos \varrho$ suivant les puissances croissantes de φ et de ψ, et en intégrant entre les limites, on trouve la série

$$\sqrt{I} = \frac{n_1 n_2 \pi}{4} . P . \left(1 - \frac{\varphi^2 + \psi^2}{4.1.2} + \frac{(\varphi^2 + \psi^2)^2}{4^2.(1.2)^2.3} - \frac{(\varphi^2 + \psi^2)^3}{4^3 (1.2.3)^2.4} + \ldots \right)$$

ou, en posant $\varphi^2 + \psi^2 = 4 \chi^2$,

$$\sqrt{I} = \frac{n_1 n_2 \pi}{4} . P . \left(1 - \frac{\chi^2}{1.2} + \frac{\chi^4}{(1.2)^2.3} - \frac{\chi^6}{(1.2.3)^2.4} + \ldots \right) .$$

Puisque $\chi^2 = \frac{\varphi^2 + \psi^2}{4} = (x_i^2 + y_i^2) R^2 \lambda^{-2} \pi^2$, et que le facteur P peut être regardé comme constant pour les valeurs très petites de x_i et y_i, l'intensité de la lumière autour de chaque grand maximum ($x_i = y_i = 0$) sera uniforme sur des cercles au rayon $r = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$, et le système des cercles qui représenteront les petits maxima sera semblable pour tous les spectres. Or comme le facteur P qui donne la mesure de l'intensité totale pour chaque système est le même qu'avec le réseau carré, le système central

contiendra encore ici la partie $p_1 \, p_2 = \frac{a_1 \, a_2}{e_1 \, e_2}$ de l'illumination totale du plan focal, la partie $p_1^2 \, p_2^2 = \frac{a_1^2 \, a_2^2}{e_1^2 \, e_2^2}$ de la lumière incidente. Ajoutons que les dimensions des petits cercles seront les mêmes qu'avec une ouverture circulaire sans réseau, du rayon R, comme l'apprend la formule connue pour ce cas de diffraction.

Par l'entremise de M. KAPTEYN j'ai pu obtenir un morceau du réseau métallique qui a été envoyé de Potsdam à plusieurs observatoires; M. SCHEINER a eu obligeance d'y ajouter une image de Véga obtenue avec le réfracteur photographique muni de son écran, et dont la figure 4 donne une représentation assez fidèle. Un examen attentif de l'image donne sur les qualités du réseau quelques indications, qu'on trouve confirmées en examinant celui-ci à la loupe Les parhélies qui se sont confondus avec leurs anneaux, à gauche et à droite de l'image principale, sont bien séparés, et ont le contour nettement défini; ce qui prouve que les fils de la *chaîne*, perpendiculaire à leur alignement, étaient bien droits et sensiblement équidistants. La somme e_1 d'un plein d_1 et d'un vide a_1, ce que j'ai nommé la période du réseau, fut mesurée très exactement, en comparant au microscope la dimension totale d'une rangée de 60 ouvertures à un décimètre divisé de Zeiss; elle était de 0,4360 mm. La mesure de l'épaisseur d_1 des fils présentait plus de difficulté. Comme je ne pouvais me procurer les quelques décimètres nécessaires du fil original, dont la provision paraît être épuisée, j'ai tâché de mesurer l'épaisseur des fils isolés au microscope. Un instrument muni d'un fil micrométrique, mais d'un grossissement trop faible pour mon but, donna $d_1 = 0{,}149$ mm.; un microscope grossissant environ 300 fois fit $d_1 = 0{,}1576$ mm., ce qui me força de croire que, même avec ce grossissement, l'irradiation ou plutôt la diffraction devait amoindrir le diamètre du fil: en

effet il est presque impossible d'amener un fil oculaire en contact avec la paroi d'un cylindre assez épais en apparence, mais vue de profil. Or la figure de diffraction ellemême prouve que cette supposition était fondée: en calculant les intensités relatives des spectres, qui comme je viens de le démontrer, sont proportionelles aux quantités de lumiére, avec $e_1 = 0,4360$ et $a_1 = e_1 - d_1 = 0,2784$, d'où $p_1 = \frac{a_1}{e_1} = 0,6385$ ou trouve successivement

0,2043, 0,0364, 0,0019, 0,0151, 0,0031, 0,0018, 0,0050, 0,0004 . . . .,

l'intensité de l'image centrale étant représentée par l'unité. Ainsi la quantité de lumière dans le 5me spectre serait presque le double de celle du 6me, ce qui est incompatible avec le témoignage de la photographie. Mais cette contradiction se dissipe dès qu'on adopte pour d_1 une valeur un peu plus grande, savoir de 0,1624 mm., que j'ai obtenue de la manière suivante.

En faisant tourner notre réseau, placé devant une lunette, d'un angle φ autour d'un axe parallèle aux fils de la chaîne on peut amener quelques uns des spectres à l'extinction, surtout en employant le trait solaire, qui peut être très intense, parce que la disparition du spectre se fait simultanément pour toute la largeur de la fente et pour toutes les couleurs. Seulement si l'on veut éteindre les spectres 4, 5, 6... il faut employer un verre rouge, parce que sans cela les spectres empiètent l'un sur l'autre. Pour amener à l'extinction le 5me spectre il fallait faire $\varphi = 21°33'$; or avec cet angle la projection de la période $e_1 = 0,4360$ était amoindrie en raison de *cos* φ, c'est-à-dire à 0,4060, et l'intervalle a_1 des fils $0,4360 - 0,1624 = 0,2736$ était rétréci à $0,4060 - 0,1624 = 0,2436$; dans ces circonstances le rapport $p_1 = \frac{a_1}{e_1}$ du vide à la période se trouvait réduit à $0,2436 : 0,4060 = \frac{3}{5}$, ce qui comporte l'extinction du

5me spectre, comme je l'ai rappelé ci-dessus. Une différence de 0,001 mm. dans d_1 exigerait $\Delta\ \varphi = 0°,9$, tandisque les plus grands écarts de la moyenne pour huit mesures que j'ai faites ne sont que de $+ 0°,6$ et $- 0°,7$. Le deuxième spectre disparaissait avec $\varphi = 41°\ 43'$, ce qui donne $d_1 =$ 0,1627; le septième avec φ 29° 20′ ou $d_1 = 0{,}1629$, mais bien que ces résultats diffèrent très peu de celui obtenu avec le 5me spectre, j'ai cru devoir m'en tenir à celui-ci, qui réunissait les meilleures conditions d'observation: petitesse de l'angle φ, et assez grande clarté et précision du spectre.

La valeur corrigée $d_1 = 0{,}1624$ mm. donne pour l'intensité relative des spectres les valeurs suivantes:

0,2183, 0,0332, 0,0037, 0,0161, 0,0018, 0,0032,
0,0047, 0,0000 . . . .,

nombres qui semblent être en accord avec ce qu'on voit sur l'image photographique. Seulement il paraît que les spectres plus éloignés du centre, p.e. le septième, étant plus allongés par la dispersion chromatique, ont impressionné la plaque sensible à un moindre degré qu'on ne pourrait s'y attendre. Les dimensions des spectres prouvent que les rayons actifs étaient compris entre $\lambda = 0{,}37\ \mu$ et $0{,}44\ \mu$ avec un maximum pour $\lambda = 0{,}41$.

La *trame* de la toile métallique est beaucoup moins parfaite que la chaîne: les fils, au lieu d'être droits, montrent une petite inflexion à chaque nouvelle maille, et leurs intervalles présentent des écarts locaux, qui en quelques cas vont à plus de 0,1 mm.; cependant la période moyenne conserve partout la valeur $e_2 = 0{,}3380$. Les fils sont plus fins que ceux de la chaîne: je trouve $d_1 - d_2 = 0{,}0169$; une série de mesures de M. Kapteyn donna $d_1 - d_2 = 0{,}0167$ mm. En prenant la moyenne de ces nombres d_2 devient $0{,}1624 - 0{,}0168 = 0{,}1456$ mm. et $a_2 = e_2 - d_2 = 0{,}1924$. Le manque d'égalité des e_2 se trahit sur la photographie par la longueur exorbitante des spectres, qui ne tient pas à la diversité des longueurs d'onde participantes, mais aux anomalies du réseau formé par la trame, puisque les spectres

formés par la chaîne seule en sont entièrement exempts. Cependant comme la traînée de lumière est interrompue entre le premier spectre et l'image principale, la quantité totale de la lumière dérivée par les spectres dans la direction des y sera celle que la théorie comporte.

Résumons: en adoptant les nombres trouvés

$$d_1 = 0{,}1624 \qquad e_1 = 0{,}4360 \qquad a_1 = 0{,}2736$$
$$d_2 = 0{,}1456 \qquad e_2 = 0{,}3380 \qquad a_2 = 0{,}1924$$

nous avons

$$p_1 = \frac{a_1}{e_2} = 0{,}6275, \qquad p_2 = \frac{a_2}{e_2} = 0{,}5692,$$
$$p_1 p_2 = 0{,}3572 = \frac{1}{2{,}80}:$$

c'est le coefficient de transparence générale de l'écran, la partie de la lumière incidente qu'il laisse passer; $p_1^2 p_2^2 = 0{,}1276 = \frac{1}{7{,}84}$: c'est la partie de la lumière incidente qui concourt à former l'image centrale. Puisque log. $0{,}1276 = -0{,}8942 = -2{,}24 \times 0{,}4$, l'écran diminue l'éclat des étoiles de 2,24 unités. Une erreur simultanée de 0,001 mm. dans les nombres d_1 et d_2 comporterait une erreur de 0,02 dans le dernier nombre.

Postscriptum. Le Bulletin du Comité international permanent, de Janvier 1892, nous fait connaître les résultats obtenus par plusieurs astronomes, qui ont mesuré l'absorption photographique du réseau de Potsdam. A une seule exception près, tous s'accordent à déduire de leurs expériences une absorption plus grande, 2,5 à 2,8 grandeurs, que ne l'indique la théorie: 2,24. En outre M. Pritchard *), qui trouve que pour les rayons visuels l'absorption est plus petite, 2,4, c'est-à-dire à peu près en harmonie avec la

*) *Comptes rendus* 28 Dec. 1891.

théorie, cherche l'explication de cette divergence dans l'action élective de la plaque photographique. Or, je ne vois pas comment cette action, très réelle du reste, pourrait affecter la loi de la dérivation de la lumière transmise vers les spectres latéraux. Les rayons non-actiniques doivent être regardés comme non avenus, mais les pinceaux de rayons efficaces seront distribués par la diffraction suivant la même loi qui régit la distribution des rayons visuels, puisqu'elle est tout-à-fait indépendante de la longueur des ondulations; toujours à condition que l'achromatisme et la mise au point soient satisfaisants dans les deux cas. Du reste M. Pritchard trouve que, pour deux écrans de transparence assez différente, la transmission photographique est bien proportionnelle aux carrés des surfaces libres dans ces écrans; mais que deviendra cette proportionnalité, à moins qu'elle n'embrasse le cas de l'ouverture entièrement libre?

Comme en déduisant des expériences le nombre de l'absorption produite par l'écran on fait intervenir la loi, ou plutôt l'hypothèse très arbitraire, que les durées de pose sont en raison inverse des intensités lumineuses, MM. Henry et Trépied ont voulu examiner la validité de cette loi, qui, soit dit en passant, est en contradiction formelle avec les résultats de M. Scheiner *). Les expériences qu'ils ont entreprises dans ce but, leur paraissent prouver qu'elle se vérifiait avec une exactitude satisfaisante. Cependant je me permettrai de faire une remarque, qui me paraît être assez importante. Si le verre dont ils se servent, au lieu d'être dépoli, était poli, la distance de la lampe au verre serait sans influence sur l'intensité des images, tant que la surface de la flamme serait assez grande pour fournir le cône entier de lumière, requis par l'objectif photographique. Ce ne serait que pour les distances plus grandes, que les images seraient affaiblies. Or le verre dépoli, bien qu'il ne soit que translucide, favorise singulièrement le passage de la lumière suivant la ligne droite: avec un certain verre bien dépoli

*) *Réunion du comité int. perm.* 1891, page 81—97.

†) *Bulletin de* 1892, p. 20.

je trouve que l'intensité est réduite à la moitié pour une déviation de 7^0 à 8^0. Je me hâte d'ajouter qu'il faudrait connaître les détails de l'expérience, les dimensions de la flamme et des objectifs, la distance de ceux-ci au verre, et le degré du dépoli, pour qu'on pût évaluer l'influence que la transparence du verre peut avoir eue sur l'intensité des images. En tout cas, il est certain qu'elle doit avoir raccourci le temps d'exposition requis pour les images faibles.

Après tout je suis fermement persuadé que les écrans à mailles carrées, bien construits et bien mesurés, offrent la base la plus solide pour toutes les expériences, qui exigent deux sources de lumière dont l'intensité soit dans un rapport bien déterminé.

Février 1892.

Fig. 1.

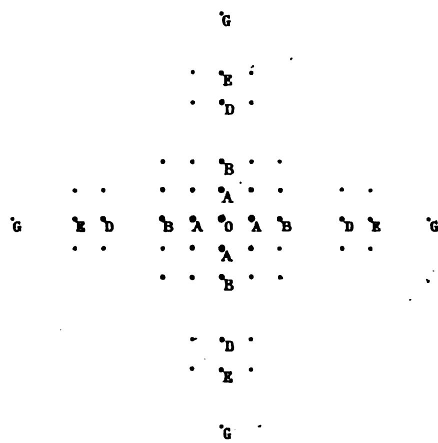


Fig. 2.

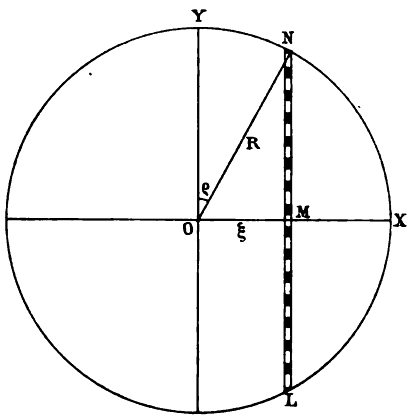


Fig. 3.

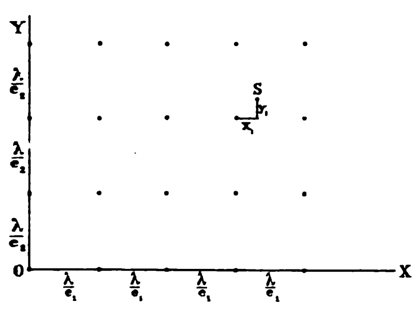


Fig. 4 $\frac{2}{1}$.



A J W sculps. P.W.M.T. impr

VERSLAG

VAN DE

COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK VAN NEDERLAND

OVER HET JAAR 1891.

Als leden van uwe Commissie voor het Geologisch onderzoek van Nederland hebben wij de eer u het navolgende verslag van onze bemoeiingen, gedurende het jaar 1891, uit te brengen.

Zoodra wij kennis hadden ontvangen van het verleenen der Rijkstoelage van *f* 500 over het jaar 1891, hebben wij ons wederom gewend tot de Heeren:

Dr. J. LORIÉ te Utrecht, Dr. H. VAN CAPPELLE te Sneek, Prof. Dr. G. A. T. MOLENGRAAFF te Amsterdam en Dr. J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK te Leiden, om hunne medewerking in te roepen.

De Heer LORIÉ heeft gedurende den afgeloopen zomer zijne onderzoekingen voortgezet, zoowel van het Merwedekanaal, als van verschillende hooge veenen in Noord-Brabant en Limburg.

De Heer VAN CAPPELLE onderzocht in het voorjaar de grondsoorten van een zestal ± 10 M. diepe boringen, welke aan den bouw van twee nieuwe sluizen in de Drenthsche hoofdvaart zijn voorafgegaan, en maakte aldaar terreinstu-

diën. In den zomer volbracht hij geologische waarnemingen in het diluvium van West-Drenthe, en in de omstreken van Steenwijk en Havelte.

De Heer SCHROEDER VAN DER KOLK volbracht in de maanden Juli en Augustus een onderzoek in de omstreken van Markelo, tot geologische kaarteering van dien diluvialen bodem.

Van al deze onderzoekingen hebben genoemde Heeren een kort verslag opgemaakt, waarin hunne uitkomsten in de hoofdzaken vermeld worden. Deze verslagen hebben wij der Akademie aangeboden; zij zijn (van volgnummers voorzien) in de *Verslagen en Mededeelingen* van 1891 afgedrukt. N°. 2 en N°. 5 van Dr. LORIÉ (met een proefkaartje), N°. 1 en 4 (met een geologisch kaartje) van Dr. VAN CAPPELLE, en N°. 3 (met een geologisch kaartje) van Dr. SCHROEDER VAN DER KOLK.

De uitvoerige verhandelingen omtrent hunne onderzoekingen zullen deze Heeren later, hetzij aan de Akademie aanbieden, hetzij in een buitenlandsch Geologisch tijdschrift publiceeren. Reeds heeft Dr. VAN CAPPELLE zijne verhandelingen over het Diluvium van West-Drenthe aan de Akademie ingezonden, en Dr. LORIÉ die over Diluvium en Hoogveenen in Noord-Brabant en Limburg toegezegd.

De Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid heeft ons op ons verzoek hulp en medewerking beloofd. Tengevolge daarvan hebben wij verscheidene mededeelingen omtrent grondwerken in uitvoering ontvangen: zoo van den Hoofdingenieur BLOM omtrent grondboringen aan den weg van Eemnes naar Amersfoort, van Utrecht naar Amersfoort, en van Zeist naar Woudenberg. Dr. LORIÉ heeft zich bereid verklaard de daarbij verzamelde grondmonsters te onderzoeken. De Hoofdingenieur SCHNEBBELIE te 's Hertogenbosch zond ons in September bericht, dat acht boringen zouden plaats hebben: aan het Heusden'sche kanaal, aan de Maas nabij Giesen, bij Munnikenland, nabij den Poederoijenschen dijk. Hij heeft op ons verzoek de monsters toegezonden aan Dr. LORIÉ, die opnieuw de bereidwilligheid had het onderzoek daarvan op zich te nemen.

Ook ontvingen wij eenige bestekteekeningen met de uitkomsten van gedane grondboringen, te weten: van den Hoofdingenieur LEEMANS: die welke het rivierbeheer betreffen — van den Minister van Waterstaat: die betreffende vier grondboringen in het jaar 1888 op het bovendeel van de nieuwe Merwede verricht, en die betreffende zes grondboringen ten behoeve van den bouw der kazerne te Assen in 1889 verricht; van den Heer Ingenieur van Rhijnland Dr. E. F VAN DISSEL: de uitkomsten van boringen in de nieuwe Droogmakerij Broekvelden en Vettenbroek (in het Laagveen bij Reeuwijk).

Voorts heeft nog Dr. VAN DISSEL (te Lochem) de door hem verzamelde boormonsters uit het diluvium en alluvium van Lochem, en Dr. SCHROEDER VAN DER KOLK de door hem in dezen zomer in de omstreken van Markelo verzamelde erratische gesteenten ons aangeboden.

Wat betreft de wijze waarop door ons de toegelegde gelden besteed zijn, verwijzen wij naar de hiernevensgaande rekening en verantwoording.

Uit het medegedeelde moge u blijken dat, dank zij de medewerking der Heeren LORIÉ, VAN CAPPELLE en SCHROEDER VAN DER KOLK *), en dank zij de van verschillende zijden ontvangen mededeelingen — belangrijke gegevens voor de Geologische kennis van onzen bodem in het afgeloopen jaar verkregen zijn. Wij stellen der Akademie voor haren dank te betuigen aan de Heeren LORIÉ, VAN CAPPELLE en SCHROEDER VAN DER KOLK, die zoo belangeloos tot ons doel hebben medegewerkt.

De gunstige uitkomsten die in 1891 zijn verkregen, en die wij ook in 1892 hopen te erlangen, doen het ons wenschelijk voorkomen, dat wij in staat worden gesteld om in het vervolg op nog ruimer schaal geologische onderzoekingen uit te lokken en de daaraan verbonden kosten te bestrijden.

*) Prof. Dr. MOLENGRAAFF was door andere bezigheden in het afgeloopen jaar verhinderd aan de werkzaamheden deel te nemen.

Wij stellen u daarom voor, aan de Regeering eene toelage van *f* 1000 voor het jaar 1893 aan te vragen.

Ons medelid K. MARTIN is door zijn tijdelijk verblijf in Ned. Oost-Indië verhinderd dit verslag mede te onderteekenen.

De Geologische Commissie van de Natuurk. Afd. der Kon. Akad. van Wetensch.

J. M. VAN BEMMELEN.

TH. H. BEHRENS.

VAN DIESEN.

A. D. VAN RIEMSDIJK.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING

VAN DEN HEER **A. C. VAN RIJN VAN ALKEMADE,**

GETITELD:

"TOEPASSING DER THEORIE VAN GIBBS

OP

EVENWICHTSTOESTANDEN VAN ZOUTOPLOSSINGEN

EN

VLOEISTOFMENGSELS".

(Uitgebracht in de Vergadering van 30 Januari 1892).

De verhandeling van den Heer VAN RIJN VAN ALKEMADE, waarover ons oordeel gevraagd werd, bevat toepassingen van de bekende theorie van GIBBS op moleculaire evenwichten, bij welke eene oplossing met één of twee vaste bestanddeelen in het spel is, en wel voor zoover die kan gegeven worden zonder in onderstellingen te treden over moleculaire bewegingen en krachten. Van de verschillende functiën die GIBBS heeft aangegeven en die, elke op hare wijze, bij een dergelijk onderzoek kunnen gebruikt worden, kiest de schrijver die uit, welke GIBBS door ζ heeft voorgesteld, en die veelal de thermodynamische potentiaal onder constanten druk genoemd wordt, eene keus die voor stelsels met drie componenten zekere voordeelen aanbiedt. De algemeene evenwichtsvoorwaarde, dat bij een op standvastige temperatuur en onder constanten druk gehouden stelsel de functie ζ een minimum moet zijn, wordt in een vorm gegoten, dien men

reeds bij den Amerikaanschen natuurkundige aantreft. Ook verscheidene andere beschouwingen, b.v. die over de stabiliteit van het evenwicht, zijn aan dezen ontleend.

Nieuwe grondbeginselen worden dus in de verhandeling niet gebezigd; hare beteekenis moet liggen in de toepassing op de waargenomen verschijnselen. Achtereenvolgens worden behandeld: het evenwicht van eene oplossing die door een half doordringbaren wand van het zuivere oplossingsmiddel gescheiden is — waarbij eene formule voor den osmotischen druk wordt gevonden die tot verschillende gevolgtrekkingen leidt —; het evenwicht eener oplossing van eene enkele stof met die stof zelf in vasten toestand, of met een vast hydraat daarvan; eindelijk het geval, dat eene oplossing die twee zouten bevat in aanraking is met de twee vaste zouten, met hydraten daarvan of met een dubbelzout. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan de oplosbaarheid van isomorphe mengkristallen; de daaromtrent door den Heer Bakhuis Roozeboom verrichte onderzoekingen gaven hiertoe aanleiding.

De langs analytischen weg verkregen evenwichtsvoorwaarden worden telkens meetkundig toegelicht met behulp van de lijnen of oppervlakken die, bij gekozen druk en temperatuur, de waarde van ζ voor de oplossingen als functie van hare samenstelling weergeven. Aan de vaste phasen beantwoorden geïsoleerde punten, of — in het geval van de isomorphe mengkristallen — eene kromme lijn. Als er twee opgeloste stoffen zijn, wordt de samenstelling der oplossing die met bepaalde vaste phasen in evenwicht is, aangeduid door de ligging van het punt, waarin het ζ—vlak voor de vloeistof wordt aangeraakt door een vlak dat men brengt door de punten die aan de vaste phasen beantwoorden, of dat gaat door eene raaklijn aan de lijn, die op de isomorphe mengkristallen betrekking heeft. Zijn er slechts twee componenten dan wordt hetzelfde doel bereikt door eene nog eenvoudiger constructie in een plat vlak.

Uitvoerig worden de evenwichten besproken bij welke, als druk en temperatuur gekozen zijn, de samenstelling der

oplossing geheel of slechts ten deele bepaald is, en die wij kortheidshalve als bepaalde en onbepaalde evenwichten zullen onderscheiden. Er wordt uiteengezet, hoe, bij eene zekere temperatuur, een overgang kan plaats hebben van het eene bepaalde evenwicht in het andere en hoe de richting van dien overgang in verband staat met het teeken der warmteontwikkeling, waarvan de bij de overgangstemperatuur mogelijke omzetting vergezeld gaat. Ook wordt van de bijzondere gevallen gewag gemaakt, waarin eene oplossing niet bij alle mengverhoudingen in stabiel evenwicht verkeert, waarbij dan twee verschillende oplossingen naast elkander kunnen bestaan. Eindelijk wordt aangetoond, hoe er soms twee oplossingen zijn, die, elke op hare beurt, met eene zelfde vaste phase of met een zelfde paar vaste phasen in evenwicht kunnen verkeeren.

Is het evenwicht bepaald, dan zijn bij een gekozen druk de grootheden die de samenstelling der oplossing aangeven, en de daarvan afhankelijke osmotische druk functien van de temperatuur, die door den loop van kromme lijnen kunnen worden voorgesteld. Zijn er met dezelfde componenten twee bepaalde evenwichten mogelijk, dan zullen de overeenkomstige lijnen die daarop betrekking hebben, elkander snijden in een punt dat aan de overgangstemperatuur beantwoordt. Verschillende bijzonderheden in den loop der lijnen, o. a. de hoek waaronder de snijding plaats heeft, worden tot op zekere hoogte behandeld.

Het bovenstaande moge voldoende zijn, om een denkbeeld van den inhoud der verhandeling te geven. Onze kennis van den inwendigen bouw der lichamen wordt er niet door uitgebreid; wij vinden geene poging om de gedaante der gebezigde lijnen en oppervlakken uit eene moleculaire theorie af te leiden. Natuurlijk zou een stap voorwaarts in deze richting veel meer nut hebben dan hetgeen de Heer van Rijn thans heeft geleverd, maar het is begrijpelijk dat hij er zich met het oog op de groote moeilijkheden, waarmede moleculaire theoriën te worstelen hebben, niet aan heeft gewaagd, en dat hij telkens de figuren die voor een

bijzonder geval moeten dienen, pasklaar heeft gemaakt voor de waargenomen verschijnselen. Men kan zeggen dat hij zich bepaald heeft tot eene graphische voorstelling van deze laatste, maar hij heeft dat gedaan in de taal van den thermodynamischen potentiaal. Daardoor staan zijne graphische voorstellingen hooger dan die welke het verband tusschen rechtstreeks waargenomen grootheden uitdrukken en kunnen zij tot een beter overzicht over de zoo talrijke waarnemingen leiden. Bovendien kan eene dergelijke inkleeding de aandacht der waarnemers vestigen op bijzonderheden die hun anders lichtelijk zouden ontsnappen.

De verwachting dat op deze wijze het aangeboden werk van nut kan zijn doet ons voorstellen het in de werken der Akademie op te nemen, maar geeft ons tevens aanleiding tot eene bedenking. In eene verhandeling, vooral bestemd voor hen die de beschouwingen van Gibbs bezwaarlijk kunnen verstaan en wien het moeilijk valt de algemeene theorie op concrete gevallen toe te passen zouden wij beknoptheid en vermijding van noodeloozen wiskundigen omslag bijzonder op prijs stellen. Deze deugden nu vinden wij minder dan wij zouden wenschen. Wij hebben den indruk ontvangen dat de Heer van Rijn, terwijl hij achtereenvolgens verschillende gevallen, elk op zich zelf, nauwgezet en breedvoerig bestudeerde, aan zijn werk een omvang heeft gegeven, waartoe het niet zou zijn aangegroeid als hij meer getracht had, algemeene regels op den voorgrond te plaatsen en de bijzondere gevallen daaruit af te leiden. In het vertrouwen dat het den schrijver zal gelukken, eenige bekorting aan te brengen geven wij in overweging, het stuk, vóór het gedrukt wordt, weder in zijne handen te stellen.

H. A. LORENTZ.

J. D. v. d. WAALS.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 Februari 1892.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, VAN BEMMELEN, MAC GILLAVRY, HOFFMANN, BAKHUIS ROOZEBOOM, PEKELHARING, STOKVIS, VAN DER WAALS, ZAAIJER, GRINWIS, BEIJERINCK, BIERENS DE HAAN, FORSTER, SCHOUTE, MOLL, VAN DORP, MULDER, KOSTER, HUBRECHT, PLACE, ZEEMAN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, KORTEWEG, RAUWENHOFF, A. C. OUDEMANS JR., FRANCHIMONT, VAN DIESEN, HOEK en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris. — Voorts de Correspondent SLUITER.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. OBREEN, Hoofddirecteur van 's Rijks-Museum te Amsterdam, 29 Januari 1892; 2°. C. KERBERT, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 13 Februari 1892; 3°. A. J. ENSCHEDE, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 3 Februari 1892; 4°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 10 Februari 1892; 5°. B. SHARP, Secretaris van de Academy of natural Sciences te Philadelphia, 11 Februari 1892: Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 1, 18 Februari 1892; 2°. den Secretaris van het k. k. österreichische Gradmessungs-Bureau te Weenen, 1892; 3°. J. F. Bride, Bibliothecaris van de Public Library te Melbourne, 7 December 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren: 1°. berichten van de Heeren J. A. C. Oudemans en Behrens, over het niet bijwonen van de vergadering; 2°. eene missive van Z. E. den Minister van Binnenl. Zaken (6 Febr. 1892), waarin mededeeling wordt gedaan, dat de 2e helft der Rijkssubsidie voor een bezoek aan het Buitenzorgsche Station, d. i. dus de som van *f* 700.—, eerlang aan den Heer Costerus zal worden uitbetaald; 3°. eene missive van Z. E. den Minister van Binnenl. Zaken (24 Feb. 1892), ter begeleiding van een brief met bijlage, door den Hr. Dr. R. D. M. Verbeek, Hoofdingenieur, Chef der geologische opneming van Java, in zake het onderzoek van versteeningen op Java, gericht aan den Hoofdingenieur, Chef der Afdeeling Mijnwezen te Batavia. — Deze stukken, het antwoord behelzend op het advies, door de Afdeeling op den 28 Maart 1891 uitgebracht aan den Min. van Binnenl. Zaken omtrent de beste wijze om de, door den Heer Verbeek naar het Leidsche geologische Museum gezonden Javaansche versteeningen dienstbaar te maken aan de belangen der wetenschap, worden in handen gesteld van de Heeren Hoffmann, Behrens en Weber, te zamen uitmakende de Commissie, door welke vroeger advies in zake de verzameling Verbeek aan de Afdeeling werd uitgebracht. Deze Commissie zal over de in hare handen gestelde bescheiden, zoo noodig, verslag uitbrengen in de volgende vergadering; 4°. twee circulaires, betrekking hebbende op het overlijden van Sir William Macleay te Sydney en van Z. K. H. den Groothertog Constantijn Nicolagevitch te Pavlovsk bij St-Petersburg.

— De Heeren ENGELMANN en PEKELHARING brengen een gunstig verslag uit over de verhandeling van den Hr. Dr. HAMBURGER. Hun advies om haar voor de werken der Akademie te bestemmen wordt aangenomen.

— De Heer MOLL handelt over de kerndeeling bij Spirogyra.

De spreker vangt aan met eenige korte mededeelingen omtrent de gebruikte methode. Deze stelde hem in staat doorsneden in overlangsche en dwarse richting te maken van Spirogyra-draden, wier kernen in deeling verkeerden en in dien toestand gefixeerd waren.

Hij vond, bij een volgens deze methode ingesteld onderzoek, een aantal der door FLEMMING, STRASBURGER, TANGL, MEUNIER e. a. vastgestelde hoofdmomenten van het kerndeelingsproces bevestigd. Intusschen was hij tevens in staat op verschillende punten het bekende aan te vullen en enkele zaken, die niet geheel duidelijk waren, tot meerdere klaarheid te brengen.

Zonder het kerndeelingsproces op den voet te volgen, wenscht hij zich bij deze mededeeling slechts tot enkele hoofdzaken te beperken, die naar zijne meening van eenigszins meer algemeen belang zijn.

1°. Het ontstaan der kernlissen. Spreker schaart zich aan de zijde van de schrijvers, die meenen, dat het chromatine-materiaal voor de kernlissen bij Spirogyra geheel en al door den nucleolus geleverd wordt. Deze is in de rustende kern het eenige deel, dat kleurstof met kracht tot zich trekt, evenals dit gedurende de deeling uitsluitend de kernlissen doen. In kernen, die door haar vorm en door de lengte der cellen, waarin zij aanwezig zijn, zich reeds uiterlijk doen kennen als dezulke, waarin het kerndeelingsproces een aanvang heeft genomen, vond nu spreker het volgende. De nucleolus heeft zijn ronden vorm verloren en daarvoor een peervorm aangenomen en loopt in een vrij scherpe punt uit. In verband met deze punt staat een lange, onregelmatig gewonden draad, die waarschijnlijk zich onafgebroken door het geheele kernplasma heenslingert. In dezen draad vindt men sterk gekleurde korreltjes, vrij

regelmatig verspreid, zoodat de draad min of meer parelsnoervormig is. Bij zwakker gekleurde preparaten blijkt, dat het verschijnen van chromatine-korrels in dezen draad met een verminderd chromatine-gehalte van den nucleolus gepaard gaat. In volgende stadiën is deze draad in een zeker aantal (12) segmenten of lissen uiteengevallen, waarin men aanvankelijk, binnen de minder kleurbare grondsubstantie, zeker aantal chromatine-korrels onderscheidt.

Ten slotte vormen deze korrels één geheel, zoodat men dan 12 gelijkmatig-donker-gekleurde lissen heeft, waarvan de grondsubstantie niet meer als zoodanig te onderscheiden is. Tegelijkertijd is de nucleolus geheel verdwenen, terwijl aanvankelijk de 12 kernlissen in alle richtingen door het kernplasma verspreid liggen. Eindelijk vindt men ze in een aequatoriaal vlak tot een echte kernplaat vereenigd. Uit deze waarnemingen besluit spreker, dat de chromatine den nucleolus op een bepaald punt, aan den top van het peervormig geworden lichaam, verlaat, om over te gaan in een draadvormig, gewonden orgaan in het kernplasma. Terwijl de leeggeloopen nucleolus verdwijnt, verdeelt zich de chromatine over een twaalftal gedeelten van het kluwen meer en meer gelijkmatig, en heeft een uiteenvallen van den langen draad in een even groot aantal kernlissen plaats. Spreker meent hiermede aangetoond te hebben, dat de vorming der kernlissen van Spirogyra van een zeer eigenaardige organisatie afhankelijk is, die tot nu toe niet was opgemerkt en waarvan bij de kerndeeling van hoogere planten en dieren geen analogon bekend is.

Of men hier inderdaad met een uitsluitend voor Spirogyra geldend verschijnsel te doen heeft, is voor het oogenblik niet uit te maken. Maar toch wil de spreker niet nalaten op te merken, dat hij zich niet vereenigen kan met de schrijvers, die meenen, dat de kern en de kerndeeling bij Spirogyra in zeer hooge mate afwijken van hetgeen men elders waarneemt.

2°. De heteropolie. Dezen naam heeft FLEMMING onlangs gegeven aan het verschijnsel, waarbij, na de overlangsche splitsing der kernlissen de splijthelften, zich elk naar een der

twee dochterkernen begeven en niet beide naar dezelfde dochterkern.

Dit verschijnsel, dat eene zeer gelijkmatige verdeeling der kern-substantie bij de kerndeeling ten gevolge heeft, acht spreker van theoretisch belang in verband met de meening, dat de celkern de drager der erfelijke eigenschappen is. Toch is het bewijs voor de heteropolie slechts zelden met volkomen zekerheid geleverd. Dit is daaraan toe te schrijven, dat in de meeste gevallen de ligging der kernlissen bij de overlangsche splitsing van dien aard is, dat voor het tot stand komen van de heteropolie vrij gecompliceerde evolutiën der splijthelften noodzakelijk zijn. Zulke evolutiën kan men aan gefixeerd materiaal, dat hier meestal het eenige bruikbare is, zelden met genoegzame zekerheid vervolgen.

Bij Spirogyra is de zaak juist omgekeerd. Op zij-aanzichten blijkt, dat de uit 12 lissen gevormde kernplaat in aequatoriale richting splijt, terwijl beide helften uiteenwijken en de dochterkernen gaan vormen.

Berust dit verschijnsel op eenvoudige overlangsche splitsing en hebben er geene bijzondere plaatsveranderingen der kernlissen daarbij plaats, dan komt vanzelf heteropolie tot stand. Inderdaad is het nu gemakkelijk door poolaanzichten van kernplaten, die in gespleten en min of meer uiteengeweken toestand verkeeren, aan te toonen, dat met deze verschijnselen geenerlei bijzondere plaatsverandering of omlegging der overlangsche splijthelften gepaard gaat. Integendeel, zij verwijderen zich eenvoudig van elkander, zonder eenige verdere bewegingen en aanvankelijk volkomen parallel aan elkander blijvend. Spreker meent dus het gering aantal bewijzen voor de heteropolie met één vermeerderd te hebben.

3°. De vacuole-vorming tusschen de dochterkernen. Op het voetspoor van Tangel stelt men zich voor, dat in de kernspoel zich een vochtruimte zou vormen, waardoor de verbindingsdraden der dochterkernen aanvankelijk heen zouden loopen, terwijl deze zich later zouden gaan krommen en deel van den wand van de verbindingsblaas zouden gaan vormen.

Uit 's sprekers overlangsche en dwarse doorsneden blijkt nu, dat er van zulk eene ruimte, waardoor een bundel draden loopt, geen sprake is.

In een stadium, waarin de dochterkernlissen reeds onderling versmolten zijn, vindt men in de spoel 1 of meer kleine vacuolen; wanneer de uitzetting der spoel eenmaal begonnen is, steeds meerdere. Van deze krijgt één langzamerhand de overhand en verdringt de andere of versmelt er misschien soms mede. Ten slotte is er dus tusschen beide dochterkernen ééne enkele, groote vacuole: de verbindingsblaas, die later door den nieuwen celwand wordt afgesnoerd. Dit verschijnsel blijkt dus eenvoudiger te zijn dan men tot nu toe gewoon was het zich voor te stellen.

Omtrent de herkomst dezer vacuolen in de kernspoel is spreker tot nu toe niets bekend geworden. De mogelijkheid, dat zij van elders zijn aangevoerd, is geenszins uitgesloten.

Ten slotte wijst spreker op een aantal teekeningen, die op de verschillende stadiën der kerndeeling, ook die welke hier niet besproken zijn, betrekking hebben.

— De Heer VAN BEMMELEN deelt het volgende mede over het hydratische ijzeroxyde:

Uit mijne vroegere onderzoekingen omtrent het waterhoudende ijzeroxyde, was het mij gebleken dat dit, langs den natten weg verkregen, steeds amorph was, en dat al de formulen, daarvoor door verschillende chemici gegeven, waardeloos waren. Want, het scheidt zich colloïdaal of in eenigen anderen amorphen toestand af, en dan is het watergehalte van druk, van temperatuur, en van den zoogenaamden moleculairen evenwichtstoestand afhankelijk. Deze laatste is zeer veranderlijk, en wijzigt zich op gewone temperatuur zeer langzaam, bij drooging en verhitting sneller, doch steeds is het gevolg daarvan dat geene vaste samenstelling, op eene bepaalde scheikundige verbinding wijzende, verkregen wordt. Daarmede overeenkomstig dissocieert zich de verbinding zoodanig, dat men moet aannemen, dat het water sterker is gebonden naarmate minder aanwezig is. Het ijzeroxyde in al die toestanden vormt dus met water

eene onbepaalde verbinding, zooals ik dat voor de colloïdale hydraten vroeger heb aangetoond, bijv. voor $Si\,O_2$, $Al_2\,O_3$, $Be_2\,O_3$, $Sn\,O_2$, $Mn\,O_2$, $Cr_2\,O_3$. Daarentegen, als het gelukt om zulke hydraten in kristallijnen toestand te bereiden (zooals $Al_2\,O_3\,3\,H_2\,O$ en $Be\,O\,H_2\,O$), verkrijgt men eene chemische verbinding in eenvoudige verhouding, die binnen wijdere temperatuurgrenzen onafhankelijk is van den waterdampdruk, en eerst bij eene zekere temperatuur een aanvang van ontleding vertoont. In hoeverre geldt dit nu ook voor het ijzeroxydehydraat?

In verschillende verhandelingen, die overigens op een ander onderwerp betrekking hebben, wordt vermeld dat het waterhoudende ijzeroxyd zich kristallijn afscheidde. Zoo bijv. door Roussin, bij de behandeling van zijne »nitroso sulfures de fer" en evenzoo van nitroprussiednatrium met kali. Wittstein en Limberger hebben beweerd dat het colloïdale waterrijke ijzeroxyd door blootstelling aan eene lage temperatuur kristallijn wordt. En nu onlangs heeft Rousseau beweerd (in eene reeks van verhandelingen in de C. R. verschenen), dat hij door smelting van een amorph ijzeroxyd — dat nog zooveel water bevat als ongeveer aan $2\,H_2\,O$ beantwoordt — met kali, of met natron, of met koolz. kali en chloorkalium, kristallijne hydraten verkreeg van de formule $Fe_2\,O_3\,H_2\,O$ waarin hoogstens $^1/_{10}$ mol. door kali vervangen was.

Door herhaald onderzoek heb ik gevonden:

1°. dat bij uitvriezing van het water uit coll. ijzeroxyd geenerlei kristallijne structuur ontstaat, maar dat het oxyd dezelfde eigenschappen vertoont als vóór dien tijd, en dezelfde hoeveelheid water bevat bij verschillenden druk en temperatuur als vroeger waargenomen (*Recueil d. tr. Chim. Pays-Bas* 1888 p. 106—114). Het kristallijne aanzien is een gezichtsbedrog.

2°. dat evenmin uit nitroprussiednatrium, of uit Roussins kalium- en ammoniumzout (naar Pawel bereid) een krist. hydraat zich afscheidt, maar eene wel is waar dichtere maar toch amorphe stof. Zij bezit eene onbepaalde samenstelling, en is door de inwerking van het heete water reeds

gedehydrateerd tot beneden 1 mol. H_2O. (Gevonden 0,8 mol.). De glinsterende blaadjes, die een bedriegelijk kristallijn uitzicht hebben, zijn vliezen.

3°. De zoogenaamde hydraten van Rousseau zijn louter ontledingsproducten van Kalium- of Natriumferriet, hetwelk door de inwerking van water zijn alkali verloren en daarvoor water heeft opgenomen. Het heeft den kristalvorm bewaard en is dus pseudokristallijn geworden; inwendig bestaat het uit amorph ijzeroxyd, dat ongeveer 1 mol. H_2O terughoudt of minder (tot 0,7 Mol.), wanneer het op 100° gedroogd is.

Het kristallijne ferriet heeft de samenstelling $Fe_2O_3K_2O$ of $Fe_2O_3Na_2O$. Het ontstaat reeds als ijzeroxyd met zeer sterke kaliloog verhit wordt. Het ijzeroxyd is namelijk daarin oplosbaar, en wordt door verdunning met water weder allengs afgescheiden *). Eerst vormen zich groenachtige vierkante geheel doorschijnende plaatjes, volgens Dr. Schroeder van der Kolk op gepolariseerd licht werkende, en hoogstwaarschijnlijk van het Rhombische stelsel (o P en ∞ P). Bij voortgezette concentratie van de kali, veranderen deze platen in fraaie lichtgroene geheel doorschijnende octaëders (hoogst waarschijnlijk regulair). Dezelfde octaëders verkreeg ik door verhitting van watervrij ijzeroxyd met een mengsel van soda (of potasch) en chloorkalium bij eene sterke gloeihitte, waarbij het KCl verdampte (in een Hempelschen oven). Eerst ontstonden lichtgroene kogeltjes, dan allengs kleine kristalletjes, die zich langzamerhand vergrootten, en ten slotte eenen diameter bereikten van 0,003—0,03 mm. Ten snelste van de alkalizouten door koud water bevrijd, waren deze kristallen nog slechts voor $^{8}/_{10}$ ontleed. Bij langere behandeling met water werden zij geheel ondoorschijnend en in bruinrood amorph waterhoudend ijzeroxyd omgezet, onder behoud van den kristalvorm.

Rousseau heeft onlangs een bewijs trachten te geven, dat

*) Dit is de oorzaak dat sterk gegloeid en in zuren moeielijk oplosbaar of zoo goed als onoplosbaar geworden ijzeroxyd door verhitten met sterke kaliloog, of door verhitting met watervrije soda weder in een in zuren oplosbaren toestand wordt overgebracht.

het water (10,1 pCt. voor $Fe_2 O_3 H_2 O$) reeds in de kristallen aanwezig is, als zij bij zeer hooge temperatuur gevormd worden, ofschoon daarmede in strijd is dat het aangewende waterhoudende oxyd bij die temperatuur alle water verliest. Hij behandelde de smeltmassa met watervrije glycerine en absoluten alcohol, om het alkalicarbonaat en alkalichloruur te verwijderen, en vond dan toch nog in het product 5 à 9 pCt. H_2O. Dit bewijs is waardeloos, zoolang hij niet heeft aangetoond, dat glycerine en alcohol op $Fe_2 O_3 K_2 O$ geen werking uitoefenen, waarbij eene kaliumverbinding en water gevormd worden. Geschiedt zulks, dan kan het vrijkomende ijzeroxyde, dat zich zoo gretig met eenig water verbindt, dit opnemen.

Het kristallijne ijzeroxydhydraat bestaat evenwel, en kan ook kunstmatig gemaakt worden. Vooreerst levert ons de natuur het kristallijne Göthit van de samenstelling $Fe_2O_3H_2O$. Nu vond ik dat dit werkelijk aan de vereischten van eene bepaalde chemische verbinding voldoet. Het van Lostwithiel uit Cornwales afkomstige Göthiet verdroeg eene temperatuur van 250°. Eerst bij 280° begon het eenig water te verliezen; en bij 300° verloor het bijna al zijn water, wel langzaam, doch in een regelmatigen gang van ontleding. Ten tweede is het door Brunck en Graebe in 1880 ontdekt in een ouden gegoten ijzeren ketel, waarin aanhoudend bijtende soda gesmolten was geweest. Zij vonden voor de samenstelling $Fe_2O_3H_2O$ (het Fe_2O_3 voor een klein gedeelte door Mn_2O_3 vervangen). Ik heb eene hoeveelheid der kristallen van den Heer Brunck ontvangen. Zij zijn doorschijnende hexagonale plaatjes. Eene nauwkeurige analyse leerde mij echter dat zij niet vrij zijn van alkali, en daarvan te veel bevatten (bijna $^1/_{10}$ mol.) en dit te sterk vasthouden om aan te nemen, dat zulks aanhangend of ingesloten is. Men moet dus aannemen dat het chemisch gebonden is. Ik acht dat een klein deel $Fe_2 O_3 K_2 O$ met $Fe_2O_3H_2O$ isomorph samengekristalliseerd is. Daaruit meen ik ook de waarneming te mogen verklaren, dat de blaadjes eenigszins hygroskopisch zijn (dat is: bij 15° in droge ruimte het water verliezen, hetgeen zij boven 1 mol. H_2O

bevatten, 0.3 mol.) en reeds bij 100^0 meer water afgeven. Zij vertoonen nog niet geheel de vastheid van samenstelling, die men van het kristallijne ware hydraat $Fe_2O_3H_2O$ mag verwachten, al is dan ook het aldus gevormde hydraat gemakkelijker ontleedbaar dan het zoo veel dichtere en eerst bij 280—300° zich ontledende Göthiet.

Het is mij verder gebleken, dat in de slib van bijtende sodaketels werkelijk kristallijn ijzeroxydhydraat gevormd wordt — doorschijnende, geene pseudokristallen.

Van TROMMSDORFF verkreeg ik zulk slib. Na uitspoeling van de natron hield ik eene massa van amorph waterhoudend ijzeroxyde over, waaruit zich door slibbing eene kleine hoeveelheid zwaarder poeder liet gewinnen. Dit vertoonde zich als hexagonale plaatjes en als slijpsteenvormige staafjes, trapvormig gelaagd; volgens Dr. SCHROEDER VAN DER KOLK ∞ P met o P of P, gelaagd (abgestuft) naar o P, en op gepolarariseerd licht inwerkende.

Ik heb de oorzaak van de vorming van zulk eene dikke laag kristallen als BRUNCK en GRAEBE in hunnen ijzeren ketel hebben waargenomen, nog niet kunnen opsporen, maar hoop het onderzoek daaromtrent voort te zetten. Het is mij nog niet gelukt uit de oplossing in bijtend alkali kristallijn ijzeroxydhydraat te verkrijgen.

Eene meer uitvoerige uiteenzetting van de bovengegevene uitkomsten, en van de gemaakte analysen hoop ik over korten tijd te publiceeren. De Heer BEYERINCK ontvangt opheldering omtrent de vraag, welk begrip aan colloïden en en colloïdalen toestand ten grondslag ligt.

— De Heer VAN DER WAALS spreekt »over een toepassing van de wet der overeenstemmende toestanden bij opgeloste stoffen" en wel in die gevallen geldig, waarin de temperatuur, die hij »kritische temperatuur der volledige menging" heeft genoemd, lager ligt dan de kritische temperaturen van het oplosmiddel en van de opgeloste stof.

Door NATANSON is aangetoond door getallenwaarden, aan de waarneming ontleend, dat wanneer men de volumina beschouwt, die een hoeveelheid der opgeloste stof, bijv. de

gewichtseenheid in opgelosten vorm inneemt, de volgende eigenschap bevestigd gevonden wordt. »Bij een temperatuur, die een gegeven fractie der kritische temperatuur is, is de verhouding der genoemde volumina in de coëxisteerende vloeistoffen even groot als bij een enkelvoudige stof de verhouding tusschen damp- en vloeistofvolume. De spreker heeft onderzocht, wat uit de door hem gegeven theorie omtrent de al- of niet geldigheid dezer eigenschap en andere soortgelijke zou volgen — en is tot de volgende uitkomst gekomen — waarbij echter zekere vereenvoudigende onderstellingen zijn aangenomen.

Noemt men het volume, dat een molekulaire hoeveelheid der opgeloste stof inneemt W, en zijn V_1 en V_2 de volumes voor een molekulaire hoeveelheid van oplosmiddel en opgeloste stof in ongemengden toestand — dan is de gang van de thermodynamische potentiaal van het oplosmiddel gegeven door de formule

$$M R T \log_e \frac{W - V_2}{W - V_2 + V_1} + V_1 V_2^2 \frac{\left(\frac{a_1}{V_1^2} + \frac{a_2}{V_2^2} - \frac{2 a_{12}}{V_1 V_2}\right)}{W^2}$$

Neemt men deze uitdrukking negatief en stelt men ze grafisch voor, W als abscis nemende, dan gelijkt de aldus verkregen kromme geheel op den loop van p als functie van V bij een enkele stof; voor $W = V_2$ is de ordinaat oneindig groot, voor $W = \infty$ is de ordinaat $= 0$, en voor waarden van T beneden zekere kritische waarde T_k is er een maximum- en een minimum-waarde. Daar de limietwaarde van $\frac{1}{V_1} \log \left\{ 1 - \frac{V_1}{W - V_2 + V_1} \right\}$ voor $V_1 = 0$ gelijk is aan $\frac{1}{W - V_2}$, zal de loop der besproken kromme des te meer met de bekende drukkromme overeenstemmen, naarmate V_1 klein is ten opzichte van V_2.

Bij coëxisteerende vloeistoffen moet de thermodynamische potentiaal evengroot zijn — een eigenschap die in de plaats komt van deze, dat bij een enkele stof de druk evengroot

moet zijn voor coëxisteerende vloeistof- en damp-phasen.

De rechte lijn, die in de drukkromme voor een enkele stof de punten van vloeistof- en damp-phase verbindt, moet de kromme snijden, zoodat aan den regel der gelijke vlakke inhouden voldaan wordt. Dezelfde regel moet in de potentiaalkromme vervuld worden, wat men aantoont door de voorwaarde dat in coëxisteerende phasen ook de potentiaal der opgeloste stof evengroot moet zijn.

Spreekt men dus bij een opgeloste stof van een vloeistof en een dampvolume, daarmede bedoelende de volumes waarbij veel en waarbij weinig opgelost is — dan blijkt uit het bovenstaande, dat dezelfde wetten, die bij een enkelvoudige stof voor deze volumes bij verschillende temperaturen gelden, ook bij eene oplossing met des te grooter graad van benadering geldig zijn naarmate V_2 groot is ten opzichte van V_1.

Om de kritische waarden voor W en T te vinden, moet men met de potentiaalkromme handelen als bij een enkele stof met de drukkromme, n.l. het eerste differentiaalquotiënt naar W, en ook het tweede $=0$ stellen.

Men vindt dan:

$$\frac{MRT}{(W-V_2)(W-V_2+V_1)} = 2V_2^2\,\frac{\left(\frac{a_1}{V_1^2}+\frac{a_2}{V_2^2}-\frac{2a_{12}}{V_1V_1}\right)}{W^3} \quad ..(\alpha)$$

en

$$\frac{MRT\left(W-V_2+\frac{V_1}{2}\right)}{(W-V_2)^2(W-V_2+V_1)^2} = 3\,\frac{V_2^2\left(\frac{a_1}{V_1^2}+\frac{a_2}{V_2^2}-\frac{2a_{12}}{V_1V_2}\right)}{W^4} \quad .(\beta)$$

Door eliminatie van T vindt men het kritisch volume W_k uit de vergelijking:

$$\frac{W_k-V_2+\frac{V_1}{2}}{(W_k-V_2)(W_k-V_2+V_1)} = \frac{3}{2\,W_k}$$

of ingeval V_1 verwaarloosd wordt

$$W_k = 3\,V_2.$$

Is V_1 niet te verwaarloozen, maar toch klein:

$$W_k = 3\left(V_2 - \frac{V_1}{2}\right).$$

Door substitutie dezer waarde van W_k vindt men T_k uit een der vergelijkingen (α) of (β). Zelfs in het geval dat V_1 te verwaarloozen is tegenover V_2, wordt de waarde dezer kritische temperatuur bepaald niet alleen uit eigenschappen der opgeloste stof, die door V_2 en a_2 zijn aangeduid, maar ook door de eigenschappen van het oplosmiddel, die door $\frac{a_1}{V_1^2}$ zijn aangeduid en door de onderlinge attractie die door a_{12} is aangegeven.

Daar men naar willekeur elk der stoffen als opgelost in de andere kan beschouwen, gelden de bovengenoemde regels voor beide stoffen, met dien verstande, dat als V_2 groot is ten opzichte van V_1 en de genoemde regels dus approximatief voor stof 2 gelden — de afwijking voor stof 1 groot kan zijn.

— De Heer HOFFMANN spreekt over de ontwikkelingsgeschiedenis van de aorta en het hart bij het embryo van den haai (Acanthias vulgaris).

In het stadium, waarin zich drie kieuwzakken hebben gevormd en de eerste kieuwzak naar buiten is doorgebroken, worden de aorta en het hart aangelegd. De ontwikkeling der aorta geschiedt op de volgende wijze:

De hooge cilindervormige cellen, welke den wand van den oerdarm vormen, veranderen aan de rugzijde van het embryo in uiterst teedere, platte cellen, die volkomen op endotheliën gelijken. Daarop snoert zich dit gedeelte van den oerdarm af en vormt de aorta dorsalis. Bij dit proces, maar vooral bij de nieuwvorming van den darmwand, treedt nu de raadselachtige subchordaalstreng in werking, zooals blijkt uit de mitotische kerndeelingen van de cellen, waaruit hij is opgebouwd. Hij vervormt zich in eene dikke staaf, die de aorta halveert, en deelt zich daarna zelf in twee

stukken. Het eene stuk blijft aan de chorda zitten, het andere neemt deel aan de nieuwvorming van den darmwand. Dit heeft zoowel aan het voor- als aan het achtereinde der aorta plaats.

Kort voordat aan het achtereinde van het embryo de subchordaalstreng zelf weder een deel van den oerdarm wordt, beginnen de celwanden der aorta weder met de cellen van die streng te versmelten.

Het hart ontstaat door eene bilaterale, maar asymetrische uitstulping van den buikwand van den oerdarm, nadat ook hier het hooge cilinderepithelium vooraf in een endothelium zich heeft vervormd. De linker uitstulping is aanvankelijk veel grooter dan de rechter; later wordt het verschil geringer. Beide uitstulpingen snoeren zich spoedig van den oerdarm af en versmelten met elkander tot een zak, welke zich naar voren in den truncus arteriosus voortzet. De geheele ontwikkeling van het hart en van de aorta geschieden buitengewoon snel.

— De Heer Franchimont toont aan de vergadering een monster van het aethylaldoxime, dat tot nog toe slechts als vloeistof bekend was, als een vaste, prachtig gekristalliseerde stof, die bij 48° C. smelt. Wellicht is dit een stereoisomeer. Het onderzoek hierover is in gang.

— Op verzoek van de Utrechtsche leden, bij monde van den Heer Pekelharing, wordt besloten, de Maart-vergadering der Afdeeling te verdagen tot 2 April omdat de laatste Zaterdag in Maart, d.i. de 26e der maand, samenvalt met den Dies natalis der Utrechtsche Universiteit.

— De Heer Bierens de Haan biedt voor de boekerij der Akademie aan, uit naam van den Heer G. Monchamp, een exemplaar van het door dezen geschreven boekwerk: Galilée et Belgique. — Voorts een nieuw stuk van het Nieuw Archief der Wiskunde.

VERSLAG

OMTRENT EENE VERHANDELING

VAN DEN HEER Dr. H. J. HAMBURGER TE UTRECHT,

GETITELD:

„OVER DEN INVLOED VAN ZUUR EN ALKALI OP GEDEFIBRINEERD BLOED".

(Uitgebracht in de Vergadering der Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam op 27 Februari 1892).



Deze verhandeling sluit zich waardig aan bij vroegere onderzoekingen omtrent de regeling der stofbeweging in dierlijke cellen en vochten, door den schrijver in de Verslagen en Mededeelingen gepubliceerd.

Na de ontdekking van den Heer HAMBURGER, dat bij wijziging van het CO_2 gehalte van het bloed een wisseling van vaste bestanddeelen plaats heeft tusschen bloedlichaampjes en plasma, en wel in isotonische verhoudingen en ten gevolge van eene wijziging van de permeabiliteit der genoemde lichaampjes, rees in de eerste plaats de vraag of het CO_2 hier een bijzonderen invloed heeft dan wel als een gewoon zuur werkt.

In het *eerste* hoofdstuk nu der aangeboden verhandeling toont de Heer H., volgens de vroeger door hem gebezigde methoden aan, dat SO_4K_2 en KCl, mits in zeer groote verdunning toegevoegd, dezelfde uitwerking op de permeabiliteit hebben als CO_2. De roode bloedlichaampjes staan nog aan meer geconcentreerde Na Cl-oplossingen kleurstof

af dan zonder voorafgaande behandeling met zuur; het gehalte van het serum aan vaste stof klimt, door de uittreding vooral van eiwit uit de lichaampjes; deze nemen hunnerzijds chloriden en phosphaten uit het serum op.

Alkaliën gedragen zich, blijkens de proeven, in het *tweede* hoofdstuk medegedeeld, in tegenovergestelden zin: de concentratie der Na Cl-oplossing, waarbij haemoglobine begint uit te treden, is lager dan in den regel: het serum wordt armer aan vaste stof; de lichaampjes nemen eiwit uit het serum op en staan daarna Cl en P af.

In het *derde* hoofdstuk wordt het bewijs geleverd, dat door neutralisatie de beschreven werking van zuur en alkali weder opgeheven wordt, en de processen dus omkeerbaar zijn.

Schrijver toont dan in het *vierde* hoofdstuk nader aan, dat de wisseling tusschen de vaste bestanddeelen van lichaampjes en serum onder den invloed van alkali of zuur plaats grijpt in isotonische verhouding. Uitvoerig en grondig worden de bezwaren uiteengezet, aan de voor dit bewijs noodige bepalingen verbonden, en tevens de vrij samengestelde weg aangewezen, langs welken het mogelijk was deze bezwaren te overwinnen.

De bloedlichaampjes blijven, in weerwil van de aanzienlijke wijzigingen der permeabiliteit, ook na de behandeling met uiterst verdund zuur of alkali, de wetten der isotoniche coëfficienten volgen. Dit wordt in het *vijfde* hoofdstuk proefondervindelijk bewezen, terwijl in het *zesde* eindelijk nog proeven worden beschreven, die bewijzen dat alkali een beschermenden invloed heeft op het uittreden van roode kleurstof, onder de werking van galzure zouten, gal en chloorammonium.

Mochten de resultaten, door den Heer H. verkregen, ook voor het circuleerende »levende" bloed gelden — hetgeen op grond der vroegere onderzoekingen van den schrijver hoogst waarschijnlijk is — dan zal men terecht met hem den hier aangetoonden invloed van zuren en alkaliën als een belangrijken factor der stofwisseling hebben te beschouwen.

Terwijl wij gaarne tot opneming dezer nieuwe bijdrage van den Heer Hamburger in de werken der Akademie advisee-

ren, drukken wij de hoop uit, dat zij nog door verdere vruchten van des schrijvers vlijt en schranderheid op hetzelfde door hem met zooveel energie ontgonnen gebied moge worden gevolgd.

Th. W. ENGELMANN.

C. A. PEKELHARING.

OVER DEN INVLOED VAN ZUUR EN ALKALI OP GEDEFIBRINEERD BLOED.

DOOR

Dr. H. J. HAMBURGER.

In mijn vorig opstel *) »Over den invloed der ademhaling op de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes", toonde ik aan, dat het koolzuur de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes wijzigt.

Ik heb mij hier de vraag gesteld, of deze werking van koolzuur berust op een specifieke eigenschap van dit gas, dan wel of het werkt als een gewoon zuur, m. a. w. of het vermogen, de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes te wijzigen, ook bij andere zuren is waar te nemen.

a. *Invloed van zuren op gedefibrineerd bloed.*

Om den invloed van zuren op gedefibrineerd bloed na te gaan, vermengde ik serum met verdund zwavelzuur, voegde bij het mengsel roode bloedlichaampjes en liet deze bezinken. Van de bezonken bloedlichaampjes werden dan een paar droppels op de gewone wijze ingezet met Na Cl-soluties van verschillende sterkten, en naast deze reeks een dergelijke met de bloedlichaampjes, die niet aan de inwerking van met zwavelzuur vermengd serum waren blootgesteld geweest. Na eenigen tijd waren in beide reeksen de bloedlichaampjes bezonken. En wat bleek nu? Dat de met zuur behandelde bloedlichaampjes een sterkere Na Cl-solutie behoefden tot het vasthouden van hun kleurstof dan de oorspronkelijke bloedlichaampjes. Een resultaat, volkomen gelijk aan dat, wat ik bij het gebruik van CO_2 waarnam.

---

*) Verslagen en Mededeelingen, 3e Reeks Dl. IX, p. 197.

De volgende reeks van proeven moge genoemde uitkomst toelichten.

Van gedefibrineerd paardebloed werden 5 porties van 180 cM^3 afgemeten en aan zich zelf overgelaten. Na bezinking der bloedlichaampjes werden van ieder der 5 hoeveelheden 100 cM^3 serum afgezogen:

Deze 100 cM^3 werden respectievelijk vermengd,

A met 10 cM^3 water
B » 10 cM^3 zwavelzuur $^1/_{2 \cdot 5}$ normaal
C » 10 cM^3 » $^1/_5$ »
D » 10 cM^3 » $^1/_{10}$ »
E » 10 cM^3 » $^1/_{20}$ »

Daarna werden de aldus verkregen mengsels bij hun bloedlichaampjes gevoegd en er mede geschud. Weer bezonken de bloedlichaampjes, en wel, in een gele vloeistof, die geen spoor van haemoglobine vertoonde. Dit was wel het geval, toen 10 cM^3 zwavelzuur $^1/_2$ normaal en van sterker concentratie werden gebruikt. Met zulke sterke soluties, waarin de bloedlichaampjes kleurstof verloren, experimenteerde ik echter verder niet.

Van A, B, C, D en E werden de bovenstaande vloeistoffen verwijderd en de bloedlichaampjes op de gebruikelijke wijze met Na Cl-soluties onderzocht.

Om het overzicht van proeven en resultaten gemakkelijk te maken, diene de volgende tabel:

TABEL I.

	Gram zwavelzuur op 100 cM^3 vloeistof (bloed.)	Grenzen voor het uittreden en niet uittreden van kleurstof.
A (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 water.)	0	Na Cl-opl. van **0.57** en **0.58** %
B (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 $^1/_{2.5}$ norm. H_2SO_4)	0.1088	" " " 0.72 " 0.73 %
C (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 $^1/_5$ norm. H_2SO_4)	0.0544	" " " 0.67 " 0.68 %
D (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4)	0.0272	" " " 0.61 " 0.62 %
E (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 $^1/_{20}$ norm. H_2SO_4)	0.0136	" " " 0.58 " 0.59 %

Uit deze tabel blijk, dat de invloed van zwavelzuur op het uittreden van kleurstof aanzienlijk is, en nog duidelijk merkbaar, zelfs wanneer de verdunning bedraagt ongeveer 1 op 10.000. In aanmerking nemende de nauwkeurigheid, waarmede men het uittreden van kleurstof kan waarnemen, vermoedde ik dat bij het gebruik van 10 cM^3 $^1/_{20}$ norm. zwavelzuur, de invloed daarvan op de bloedlichaampjes nog wel zichtbaar zou zijn. Dit was werkelijk het geval. NaCl-oplossing van 0.57 % kon uit de met dit verdunde zuur behandelde bloedlichaampjes nog geen kleurstof doen uittreden, hetgeen wel het geval was met de lichaampjes van bloed A. Hieruit volgt, dat wanneer bij het bloed gevoegd wordt 0.00168% zwavelzuur, de invloed hiervan op de bloedlichaampjes nog zichtbaar is.

Het lag voor de hand, dat de verdunning van zuur nog aanzienlijker zou kunnen zijn, indien gebruik gemaakt werd van zoutzuur, waarvan het moleculair-gewicht zooveel geringer is dan dat van zwavelzuur. Ik deed de hierop betrekking hebbende proef later, doch laat hier de tabel volgen.

TABEL II.

	Gram zoutzuur op 100 cM^3 vloeistof (bloed)	Grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof.
A' (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 water)	0	Na Cl-opl van 0.66 en 0.67 %
B' (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 $^1/_{20}$ norm. HCl)	0.0101	" " " 0.68 " 0.69 %
C' (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 $^1/_{40}$ norm. HCl)	0.00505	" " " 0.67 " 0.68 %
D' (180 cM^3 bloed + 10 cM^3 $^1/_{80}$ norm. HCl)	0.00252	" " " 0.65 " 0.67 %

Uit deze tabel blijkt, dat wanneer men bij bloed 0.00252% zoutzuur voegt, de invloed hiervan op het uittreden van kleurstof uit de bloedlichaampjes nog zichtbaar is. Een verdunning van zoutzuur dus van 1 op $\frac{100}{0.00252}$, d. i. van 1 op 40.000 ongeveer.

Evenals bij de studie over den invloed van CO_2 op het bloed, wenschte ik ook hier na te gaan, of door de inwerking van zwavelzuur een uitwisseling tusschen de bestanddeelen van de bloedlichaampjes en het serum plaats greep.

Hiertoe werden 50 cM^3 van de sereuze vloeistof A, B, C, D en E (zie tabel I) in een schaaltje ingedampt en werd het residu bij 110° gedroogd.

Het	residu	van	A	woog	**4.126**	Gram
»	»	»	B	»	4.484	»
»	»	»	C	»	4.277	»
»	»	»	D	»	4.156	»
»	»	»	E	»	4.130	»

Hieruit volgt, dat door inwerking van verdund zwavelzuur op bloed, de bloedlichaampjes vaste stoffen aan het serum afgeven. Door 0.1088% H_2SO_4 (zie 2e kolom van tabel I) bij bloed te voegen, doet men het serum $\frac{4.484-4.126}{4.126} \times 100 = 8.67\%$ in vaste bestanddeelen toenemen. Natuurlijk moeten deze grootendeels eiwitstoffen zijn. Zelfs toevoeging van 0.0136% H_2SO_4 heeft nog invloed op de samenstelling van het serum en de bloedlichaampjes; immers door dat weinigje zuur is het serum $\frac{4.130-4.126}{4.126} \times 100 = 0.1\%$ in vaste bestanddeelen toegenomen ten koste van de bloedlichaampjes.

Behalve het totaal der vaste bestanddeelen werd ook nog het Chloor-gehalte der vijf genoemde vloeistoffen bepaald.

Hiertoe werd 25 cM^3 serum verdund met 200 cM^3 water, het mengsel in een kokend waterbad verwarmd en werden bij dat heete mengsel 4 droppels verdund azijnzuur gevoegd: vervolgens werd op den open vlam gekookt, dan afgekoeld en gefiltreerd. Het filtraat was steeds volkomen helder. Voor de chloorbepaling werden 100 cM^3 er van vermengd met 10 cM^3 geconcentreerd HNO_3 en 20 cM^3 $^1/_{10}$ normaal $AgNO_3$. Ma filtratie van het Ag Cl, bepaalde ik de overmaat van $AgNO_3$, met sterk HNO_3, KCNS en een paar droppels ferrinitraat. Uit deze bepalingen bleek, dat

25 cM³ van vloeistof	A	verbruikt hadden	23.4	cM³ $^1/_{10}$ norm.	$AgNO_3$
" " " "	B	" "	21.95	" " "	"
" " " "	C	" "	22.6	" " "	"
" " " "	D	" "	22.9	" " "	"
" " " "	E	" "	23.1	" " "	"

Deze cijfers leeren, dat door inwerking van zwavelzuur op bloed, het serum chloor heeft afgestaan aan de bloedlichaampjes, en wel des te meer, naarmate de hoeveelheid zuur grooter is.

Door inwerking van 0.1088$^0/_0$ H_2SO_4 (zie 2e kolom van tabel 1) heeft het serum $\frac{23.4-21.95}{23.4} \times 100 = 6.2^0/_0$ van zijn chloor aan de bloedlichaampjes afgestaan en onder den invloed van 0.0136 H_2SO_4 (E) bedraagt het bewuste chloorverlies nog $\frac{23.4-23.1}{23.4} \times 100 = 1.3^0/_0$

Ook bij de studie over den invloed van CO_2 op het bloed vond ik dat het totaal der vaste bestanddeelen van het serum door dit zuur was toegenomen, het chloorgehalte daarentegen was afgenomen. Ik kan hieraan nog toevoegen, dat latere proeven *) mij geleerd hebben, dat door de inwerking van zwavelzuur op het bloed het phosphorzuur gehalte van het serum afneemt, dat zich dus het phosphorzuur in denzelfden zin gedraagt als het zoutzuur.

b. *Invloed van alkali op gedefibrineerd bloed.*

Het interesseerde mij nu ook, den invloed van alkali op gedefibrineerd bloed te bestudeeren.

De proeven werden op dezelfde wijze verricht als boven. Om het vergelijkend overzicht gemakkelijk te maken, deel ik hier een reeks van proeven mede, welke met het zelfde bloed werden uitgevoerd, dat ook gebruikt was voor de boven beschreven proeven met zwavelzuur.

Zonder nadere omschrijving kan ik de met KOH verrichte experimenten in de volgende tabel samenvatten:

---

*) Zie beneden p. 381.

TABEL III.

	Gram KOH op 100 cM³ vloeistof (bloed.)	Grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof.
A (180 cM³ bloed + (10 cM³ water)	0.	Na Cl-opl. van **0.57** en **0.58** %
B″ (180 cM³ bloed + 10 cM³ KOH-opl ¹/₅ norm.)	0.0622	″ ″ ″ 0.51 ″ 0.52 ″
C″ (180 cM³ bloed + 10 cM³ KOH-opl. ¹/₁₀ norm.)	0.0311	″ ″ ″ 0.53 ″ 0.54 ″
D″ (180cM³ bloed + 10 cM³ KOH-opl. ¹/₂₀ norm.)	0.0155	″ ″ ″ 0.55 ″ 0.56 ″
E″ (180 cM³ bloed + 10cM³ KOH-opl. ¹/₄₀ norm)	0.00775	″ ″ ″ 0.56 ″ 0.57 ″

Uit deze tabel blijkt, dat na de inwerking van KOH op het bloed, de bloedlichaampjes in een zwakkere Na Cl-solutie uittreden van kleurstof vertoonen dan die van het oorspronkelijke bloed. Na inwerking van zuur was juist het tegengestelde het geval.

In het mengsel 180 cM³ bloed + 10 cM³ $^1/_{2 \cdot 5}$ normaal KOH begonnen de lichaampjes kleurstof te verliezen. Daarom werd alleen geëxperimenteerd met KOH-oplossingen, welke een geringere concentratie hadden dan $^1/_{2 \cdot 5}$ normaal Zooals uit tabel III blijkt, was de invloed van een zwakke KOH-solutie (E) nog duidelijk merkbaar. Na toevoeging van 0.00775 % KOH (d.i. 1 KOH op 12900 bloed) wijken de in kolom 3 van tabel III bedoelde grenzen nog af van 0.57 en 0.58.

Ook op de samenstelling van het serum doet zich de invloed van het alkali gevoelen. Dit blijkt uit de volgende cijfers, die de hoeveelheid vaste bestanddeelen weergeven, welke in het serum voorhanden zijn.

50 cM³ serum van A bevatten 4.126 Gram vaste bestanddeelen.
″ ″ ″ ″ B″ ″ 4.0105 ″ ″ ″
″ ″ ″ ″ C″ ″ 4.052 ″ ″ ″
″ ″ ″ ″ D″ ″ 4.112 ″ ″ ″
″ ″ ″ ″ E″ ″ 4.118 ″ ″ ″

Hieruit volgt, dat na inwerking van alkali op bloed het

gehalte van het serum aan vaste bestanddeelen is afgenomen ten voordeele van de bloedlichaampjes. Ook hier weer het tegengestelde van hetgeen we vonden na inwerking van zuur.

Het laatste geldt ook voor de chloor- en phosphorzuur bepalingen.

Voor	het	chloor	van	25	cM^3 serum	A	werden	verbruikt	23.4	cM^3	$^1/_{10}$ n.	$AgNO_3$
"	"	"	"	"	"	B"	"	"	25.2	"	"	"
"	"	"	"	"	"	C"	"	"	24.8	"	"	"
"	"	"	"	"	"	D"	"	"	24.1	"	"	"
"	"	"	"	"	"	E"	"	"	23.8	"	"	"

Na inwerking van alkali op bloed is dus het chloorgehalte van het serum toegenomen ten koste van de bloedlichaampjes.

Door inwerking van $0.0622^0/_0$ alkali stijgt het chloorgehalte $\frac{25.2-23.4}{23.4} \times 100 = 7.7^0/_0$, welke stijging afneemt met de vermindering van het toegevoegde alkali.

Cijfers voor de phosphorzuurbepalingen vindt men op p. 380 en 381.

Uit de beschreven experimenten volgt:

1 dat toevoeging van zuren en alkalien bij bloed, een wisseling tusschen de bestanddeelen van serum en bloedlichaampjes ten gevolge heeft.

2 dat zuren en alkalien een tegengestelde werking uitoefenen.

α. zuur wijzigt de bloedlichaapjes zoodanig, dat ze in een sterkere Na Cl-oplossing kleurstof afstaan dan vóór de inwerking;

Alkali wijzigt de bloedlichaampjes zoodanig, dat ze in een zwakkkere Na Cl-oplossing hun kleurstof behouden dan vóór de inwerking.

β. Zuur doet de hoeveelheid vaste bestanddeelen van het serum stijgen ten koste van de bloedlichaampjes. Onder die vaste bestanddeelen bekleedt het eiwit de voornaamste plaats;

Alkali doet de hoeveelheid vaste bestanddeelen van het serum dalen ten voordeele van de bloedlichaampjes. Ook hier is het voornamelijk eiwit, dat genoemde daling veroorzaakt.

γ. Terwijl het eiwitgehalte van het serum door zuur stijgt (zie β), daalt het chloor- en phosphorzuur gehalte.

Alkali brengt het tegengestelde te weeg.

Vergelijkt men deze resultaten met hetgeen wij vonden bij de inwerking van CO_2 op het bloed, dan ziet men, dat het CO_2 zich als een zuur gedroeg.

c. *Kunnen de veranderingen, welke onder den invloed van alkali, in de bloedlichaapjes en in het serum van het gedefibrineerde bloed zijn teweeg gebracht, opgeheven worden door neutralisatie van het toegevoegde zuur en omgekeerd?*

In mijn vorig opstel beantwoordde ik een dergelijke vraag met betrekking tot het kooldioxyde. Ik vroeg mij toen af: kunnen de veranderingen, welke het CO_2 heeft teweeggebracht, opgeheven worden door verwijdering van dit gas? Ik had, om het laatste te bewerkstelligen slechts een indifferent gas door het bloed te voeren. Hier echter was de zaak zoo eenvoudig niet.

Om de toegevoegde alkali buiten werking te stellen moest het, onder de noodige voorzorgen, nauwkeurig geneutraliseerd worden. Met het toegevoegde zuur was hetzelfde het geval.

Vijf molglazen *A*, *B*, *C*, *D* en *E*, in ieder waarvan zich bevonden 180 cM^3 bloed werden aan zich zelve overgelaten.

Na bezinking der bloedlichaampjes werden

100 cM^3 serum van A verwijderd en vervolgens vermengd met 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm KOH + 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4. Op dezelfde wijze werden
100 cM^3 serum van B vermengd met 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. KOH-oplossing
" " " " C " " " " " " H_2SO_4-oplossing
" " " " D " " " " " " KOH-oplossing
" " " " E " " " " " " H_2SO_4-oplossing.

Nadat de vijf mengsels met de bijbehoorende ± 80 cM^3 bloedlichaampjes waren geschud, werd weer aan de bloedlichaampjes gelegenheid gegeven, te bezinken. Bij 100 cM^3 van de vloeistof, welke zich thans boven de bloedlichaampjes van *D* bevond, werden 10 cM^3 $^1/_{10}$ normaal H_2SO_4

gevsegd en bij 100 cM^3 van de vloeistof, welke zich boven de bloedlichaampjes van *E* bevond, 10 cM^3 $^1/_{10}$ normaal KOH-oplossing. Daarna werden de beide mengsels weer met hun bloedlichaampjes geschud en ten slotte de bloedlichaampjes van *A*, *B*, *C*, *D* en *E* door middel van NaCl-oplossingen onderzocht.

Ik vat de proeven en resultaten in tabel IV samen.

TABEL IV.

PROEF.	Grenzen voor het uittreden en niet uittreden van kleurstof uit de bloedlichaampjes.
A 180 cM^3 bloed, vermengd met 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. KOH en 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4	NaCl 0.58 en 0.59 %
B 180 cM^3 bloed, vermengd met 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. KOH-oplossing..........................	NaCl 0.53 en 0.54 %
C 180 cM^3 bloed, vermengd met 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4-oplossing........................	NaCl 0.66 en 0.67 %
D 180 cM^3 bloed worden eerst vermengd met 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. KOH (zie B). Na inwerking van dit KOH worden 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4 ter verzadiging toegevoegd................	NaCl 0.58 en 0.59 %
E 180 cM^3 bloed worden eerst vermengd met 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4 (zie C). Na inwerking van dit H_2SO_4 worden 10 cM^3 $^1/_{10}$ norm. KOH ter verzadiging toegevoegd....	NaCl 0.59 en 0.60 %

Uit deze tabel kan men afleiden, dat wanneer de bloedlichaampjes met alkali zijn behandeld, waardoor blijkens de resultaten van *A* en *B*, de grenzen voor het uittreden en niet uittreden van kleurstof zijn gedaald van 0.58 en 0.59 tot 0.53 en 0.54, bij toevoeging van een aequivalente hoeveelheid zuur (zie *D*) de grenzen weer terugkeeren tot 0.58 en 0.59.

Behandelt men de bloedlichaampjes met zuur (zie *C*) dan stijgen de grenzen tot 0.66 en 0.67, maar dalen weer tot 0.59 en 0.60, wanneer bij het bloed een aequivalente hoeveelheid alkali (zie *E*) wordt gevoegd.

Bij de inwerking van alkali en zuur op de bloedlichaampjes hebben wij dus met een omkeerbaar proces te doen.

Hetzelfde namen we vroeger waar bij de inwerking van CO_2. Die omkeerbaarheid sprak toen niet alleen uit het gedrag der bloedlichaampjes, maar ook uit dat van het serum. Het laatste was ook hier het geval. Tabel V maakt dit duidelijk.

TABEL V.

PROEF	Gram vaste bestand-deelen van 50 cM³ serum.	cM³ $^1/_{10}$ norm. $AgNO_3$, gevorderd voor het Chloor van 50 cM³ serum.
A 100 cM³ bloed, vermengd met 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. KOH en 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4	3.453	39.1
B 180 cM³ bloed, vermengd met 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. KOH-oplossing + 10 cM³ water	3.381	41.9
C 180 cM³ bloed, vermengd met 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4-oplossing + 10 cM³ water..........	3.484	38.05
D 180 cM³ bloed worden eerst vermengd met 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. KOH (zie B). Na inwerking van dit KOH worden 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4 ter verzadiging toegevoegd.................	3.452	39.2
E 180 cM³ bloed worden eerst vermengd met 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. H_2SO_4 (zie C). Na inwerking van dit H_2SO_4 worden 10 cM³ $^1/_{10}$ norm. KOH ter verzadiging toegevoegd.................	3.456	38.95

Uit deze tabel blijkt,

1. dat, wanneer door inwerking van alkali (*B*) het gehalte van het serum aan vaste bestanddeelen is afgenomen, dit gehalte weer tot de oorspronkelijke waarde terugkeert, wanneer aan het bloed de aequivalente hoeveelheid zuur wordt toegevoegd (*D*).

2. dat, wanneer door inwerking van zuur (*C*) het gehalte van het serum aan vaste bestanddeelen is toegenomen, dit gehalte weer tot de oorspronkelijke waarde terugkeert, wanneer aan het bloed de aequivalente hoeveelheid alkali wordt toegevoegd (*E*).

3. Wat voor de totale hoeveelheid vaste bestanddeelen

geldt is ook bij de chloriden waar te nemen, met dit onderscheid, dat door de inwerking van alkali op het bloed het chloride-gehalte van het serum toeneemt, maar dat van de totale hoeveelheid vaste bestanddeelen afneemt, terwijl zuur het chloride-gehalte van het serum doet dalen, maar het gehalte aan vaste bestanddeelen doet stijgen.

d. *Heeft bij de inwerking van alkali of zuur op gedefibrineerd bloed een wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum plaats in isotonische verhouding?*

De onder *a* en *b* beschreven onderzoekingen leerden, dat na inwerking van zuren en van alkaliën, de grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof uit de bloedlichaampjes aanzienlijk konden verschillen van de bij de oorspronkelijke bloedlichaampjes waargenomen grenzen. Verder bleek, dat een niet onbelangrijke wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum plaats greep. Geschiedde deze wisseling nu zoodanig, dat het water aantrekkend vermogen van het serum onveranderd bleef? Zoo ja, dan was dit ook met de bloedlichaampjes het geval en de invloed van zuur en van alkali uitte zich dus slechts in een wijziging van de permeabiliteit.

Het wateraantrekkend vermogen van het serum moest dus bepaald worden en wel, voor- en nadat alkali of zuur op het bloed had ingewerkt.

Bij deze bepaling deed zich echter een belangrijk bezwaar voor. Onder gewone omstandigheden toch, wordt een zekere hoeveelheid serum met verschillende hoeveelheid serum met verschillende hoeveelheden water verdund en worden bij de mengsels enkele droppels van het zelfde bloed gevoegd. Men gaat dan na, in welk mengsel kleurstof begint uit te treden. Wil men nu het wateraantrekkend vermogen van een tweede serum met dat van het eerste vergelijken, dan heeft men slechts na te gaan, hoeveel water thans bij dezelfde hoeveelheid van de oorspronkelijke vloeistof moet gevoegd worden om uittreden van een weinig kleurstof te

voorschijn te roepen. Hierbij is het noodzakelijk, dat men voor beide reeksen gebruik maakt van dezelfde bloedlichaampjes (denzelfde indicator). Juist daarin ligt het bezwaar. Immers de experimenten onder *a* en *b* hebben geleerd, dat de bloedlichaampjes in zuur en in alkali aanzienlijke veranderingen ondergaan. Zoodra men dus de bloedlichaampjes aanwendt, om het wateraantrekend vermogen van een alkalischen vloeistof te bepalen, heeft men niet meer met denzelfden indicator te doen als waarmede het wateraantrekkend vermogen van een zure of neutrale vloeistof werd bepaald.

Dit bezwaar was echter niet moeilijk uit den weg te ruimen.

Bij het tweede serum werd zooveel zuur gevoegd dat het alkaligehalte weer overeenkwam met dat van het oorspronkelijke (eerstgenoemde) serum. Wel is waar werd op deze wijze het wateraantrekkend vermogen van het tweede serum verhoogd door het gevormde zout, doch deze verhooging was bekend en kon later afgetrokken worden. En wat de bloedlichaampjes, als indicator, betreft, nu het alkaligehalte van het tweede serum weer normaal was geworden, gedroegen zij zich als in het oorspronkelijke serum. De vermeerdering van zoutgehalte eener vloeistof toch, waarin de bloeplichaampjes eenige tijd vertoefden, heeft zooals we vroeger zagen *), als zoodanig geen invloed op de grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof in Na Cl-soluties.

Het was wenschelijk, een scherpe methode te bezitten voor de bepaling van het alkaligehalte van serum.

α. Bepaling van de alkaliciteit van serum.

Wat heeft men onder alkaliciteit eener vloeistof te verstaan? Dat is moeilijk met een enkel woord te zeggen. Gewoonlijk drukt men de alkaliciteit uit, door de hoeveelheid zuur aan te geven, die noodig is om een bepaalde hoeveelheid

---

*) Over de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes in verband met de isotonische coëfficienten. *Verslagen* en *Mededeelingen* enz. 3e Reeks, Dl. VII. p. 16.

van de alkalische vloeistof te verzadigen. Het is echter bezwaarlijk te zeggen, wanneer de verzadiging is ingetreden. Men gebruikt hiertoe indicatoren; maar het is geenzins onverschillig, welken indicator men aanwendt. M. a. w. de eene indicator zal een oplossing reeds als neutraal verklaren, welke door een anderen indicator nog als alkalisch wordt aangewezen. Zoo reageert bijv. het Na_2HPO_4 tegenover phenolphtaleïne neutraal, maar tegenover lakmoïd sterk alkalisch. Ja zelfs, zou men er toe kunnen komen om met MALY het Na_2HPO_4 zuur te noemen, omdat er nog een H in voorhanden is, die door een metaal kan vervangen worden. Volgens deze redeneering zou Na_3PO_4 neutraal zijn. Echter heeft deze wijze van opvatting tegen zich, dat ze de onderscheiding van zuren en bases in sterke en zwakke niet toelaat. En dit is stellig een bezwaar. We weten toch, dat bijv. het H_2SO_4 een zuur is van veel krachtiger zure eigenschappen dan het H_2CO_3, al binden ze beiden Na_2 in Na_2SO_4 en Na_2CO_3. Gaat het nu wel aan, het Na_2CO_3 een neutraal zout te noemen?

Het was een gelukkig denkbeeld van J. THOMSEN het begrip »aviditeit" in te voeren, dat de verhouding uitdrukt van de aantrekking, welke verschillende zuren op een basis uitoefenen en welke verhouding gevonden wordt door een zuur op een zout te laten inwerken en na te gaan, hoe de basis over de beide zuren verdeeld wordt. Nam hij de affiniteit van zoutzuur tot Na, als eenheid aan, dan moest de affiniteit van andere zuren tot Na voorgesteld worden door een breuk, die hij »affiniteitscoëfficient" noemde. Later vond OSTWALD dat de affiniteitscoëfficienten van twee zuren dezelfde waren, onafhankelijk van het metaal, ten opzichte waarvan men ze bepaalde.

Jammer, dat de coëfficienten nog slechts voor één-basische zuren en voor enkele weinige twee-basische bekend zijn. Anders hadden we met behulp van deze coëfficienten de alkaliciteit van het serum kunnen uitdrukken. Waarschijnlijk zal de bepaling dier coëfficienten voor koolzuur en phosphorzuur, welke men coëfficiënten meer bepaaldelijk voor het serum noodig heeft, niet lang op zich laten wachten, nu OSTWALD

heeft aangetoond, dat de affiniteitscoëfficienten ook bij andere verschijnselen (reactie-snelheid, enz.) voor den dag treden en dus fundamenteele waarden vertegenwoordigen. Aan genoemde bepalingen zijn echter voor twee-basische en nog meer voor drie-basische geen geringe bezwaren verbonden. De moeite zal echter wel beloond worden, omdat men dan in staat gesteld zal zijn, de alkaliciteit in juiste cijfers uit te drukken.

Maar al bezitten we deze cijfers nog niet, toch kunnen vergelijkende bepalingen der zoogenaamde alkaliciteit voor de physiologie van groot nut zijn, wanneer men slechts voor oogen houdt, wat men onder alkaliciteit wenscht te verstaan en men dus weet, wat men eigenlijk bepaalt.

Bij al mijn proeven over de bepaling der alkaliciteit werd eerst het eiwit uit het serum verwijderd. Hiertoe stonden verschillende zouten ten dienste. De meesten eischen echter verwarming, hetgeen volgens de ervaring van verschillende onderzoekers aanleiding geeft tot vermeerdering van het alkaligehalte. Van de zouten, die in verzadigde oplossing, de eiwitstoffen reeds bij gewone temperatuur neerslaan, komen in aanmerking ammoniumsulfaat en kaliumacetaat. Beiden echter werken in de groote quantiteit, waarin ze moeten worden aangewend, hoogst nadeelig op de gevoeligheid van de indicatoren.

Bij aanwezigheid van ammoniumsultaat is de indicator phenolphtaleïne zelfs geheel onbruikbaar.

Ik kwam op het denkbeeld, de eiwitstoffen van het serum neer te slaan met het dubbele volumen alcohol van 95 pCt. Over deze methode was ik aanvankelijk zeer tevreden. Het filtraat was volkomen helder en de indicatoren werden hoegenaamd niet in hunne gevoeligheid benadeeld.

Ik titreerde het filtraat met twee indicatoren, een deel met lakmoïd, een deel met phenolphtaleïne.

De titratie met *lakmoïd*, een blauwe vloeistof, bereid volgens het voorschrift van Traub en Hock *), geschiedde op de volgende wijze.

*) Ber. der Deutschen Chem. Gesellsch. B. XVII S. 2615

Nadat bij 25 cM³ der alcoholische vloeistof droppels lakmoïdoplossing waren gevoegd, liet ik uit een buret zoolang $^1/_{20}$ normaal zwavelzuur droppelen, totdat een roode kleur zichtbaar werd. De bepalingen geschiedden steeds in wijde reageerbuizen van gelijke doorsnede. Bovendien ging ik voor dezelfde proevenreeks altijd uit van gelijke hoeveelheden vloeistof en voegde zooveel $H_2\ SO_4$ toe, totdat de grensreactie bij alle proeven een gelijke intensiteit bezat.

Wat wees nu eigenlijk het verschijnen van de roode kleur (grensreactie) aan? Dat al het in de vloeistof aanwezige $Na_2\ CO_3$ was overgegaan tot $Na_2\ SO_4$ en al het $Na_2\ H\ PO_4$ in $Na\ H_2\ PO_4$. Het lakmoïd geeft dus een middel aan de hand om het gezamenlijke alkali van $Na_2\ CO_3$, $Na\ HCO_3$ en $Na_2\ HPO_4$ te bepalen. Voor CO_2 in gebonden en in vrijen toestand is deze indicator ongevoelig.

Nog zij hier opgemerkt, dat toevoeging van overmaat van $H_2\ SO_4$ en terugtitratie van het resteerende $H_2\ SO_4$ door middel van KOH hetzelfde resultaat gaf. Koking was niet zonder invloed op de uitkomst hetgeen moet toegeschreven worden aan het feit, dat CO_2 in staat is, een deel van het $Na_2\ HPO_4$ om te zetten in $Na\ H_2\ PO_4$. Het laatste reageert tegenover lakmoïd neutraal, terwijl $Na_2\ HPO_4$ alkalisch reageert tegenover dien indicator. Verwarmt men nu, dan gaat weer een deel van het NaH_2PO_4 in $Na_2\ HPO_4$ over. Vandaar dan ook, dat men na verwarming der alcoholische vloeisttof meer $H_2\ SO_4$ noodig heeft dan vóór de verwarming.

De titratie met *phenolphtaleïne* had plaats op de volgende wijze:

Bij 25 cM³ der alcoholische vloeistof werden 4 droppels eener alcoholische phenolphtaleïne-oplossing gevoegd. De vloeistof bleef geel, reageerde dus tegenover phenolphtaleïne zuur. Dan werd de vloeistof gekookt om het $Na\ HCO_3$ te maken tot $Na_2\ CO_3$ en het overige los gebonden of opgeloste CO_2 te verdrijven. Soms werd dan de vloeistof een weinig rood, doordien het CO_2, dat tegenover phenolphtaleïne zuur reageert, uitgedreven was; gewoonlijk echter niet, omdat nog $Na\ H_2\ PO_4$ aanwezig was, dat tegenover

phenolphtaleïne zuur reageert. De hoeveelheid van deze stof kon bepaald worden, door zoolang $^1/_{20}$ normaal KOH te laten bijdroppelen, totdat de vloeistof rood werd, m.a.w. totdat het $Na\,H_2PO_4$ was overgegaan in $Na_2\,HPO_4$, dat tegenover phenolphtaleïne neutraal reageert, maar bij verdere toevoeging, reeds van een spoor alkali, rood wordt.

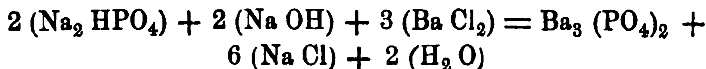
Nu werd bij de aldus verkregen vloeistof $^1/_{20}$ normaal $H_2\,SO_4$ in overmaat gevoegd en het mengsel verwarmd. Hierdoor ging het Na_2CO_3 over in Na_2SO_4. Voor dit doel werd $H_2\,SO_4$ verbruikt en de hoeveelheid die overbleef, gaf de verbruikte hoeveelheid aan. Na koking met het toegevoegde $H_2\,SO_4$ werd dus nog eens getitreerd met $^1/_{20}$ normaal KOH.

Door de beschreven titraties met lakmoïd en met phenolphtaleïne krijgt men een goed beeld van de in de alcoholische vloeistof aanwezige zouten.

Door lakmoïd bepaalt men nl. de gezamenlijke hoeveelheid basis in $Na\,HCO_3$, $Na_2\,CO_3$ en $Na_2\,HPO_4$. Door phenolphtaleïne vindt men bij de eerste titratie het $Na\,H_2\,PO_4$ en bij tweede titratie het $Na_2\,CO_3$ dat in het serum aanwezig was, de benevens de hoeveelheid die door verwarming uit het $Na\,HCO_3$ ontstond. Hieruit volgt, dat wanneer men de hoeveelheid $H_2\,SO_4$, die noodig was voor de uitdrijving van het CO_2 uit $Na_2\,CO_3$ kent door titratie met phenolphtaleïne en deze hoeveelheid aftrekt van de quantiteit, die verbruikt werd voor het $Na\,HCO_3$, $Na_2\,CO_3$ en $Na_2\,H\,PO_4$ (blijkens de titratie met lakmoïd) het verschil aangeeft, hoeveel $H_2\,SO_4$ verbruikt is voor het $Na_2\,HPO_4$.

Door controleproeven heb ik mij van het laatste kunnen overtuigen.

Beschouwt men de volgende vergelijking:



$$2\,(Na_2\,HPO_4) + 2\,(Na\,OH) + 3\,(Ba\,Cl_2) = Ba_3\,(PO_4)_2 + 6\,(Na\,Cl) + 2\,(H_2\,O)$$

dan ziet men, dat een zekere hoeveelheid Na OH verbruikt wordt om het tweebasische phosphaat om te zetten in het driebasische. Wanneer men dan ook bij een bekende hoe-

veelheid eener $Na_2 HPO_4$-oplossing, een bekende overmaat van Na OH voegt en een willekeurige, voldoende hoeveelheid Ba Cl_2, dan blijkt bij terugtitratie van de aldus verkregen vloeistof, dat nu minder Na OH in de vloeistof zich bevindt, dan toegevoegd was, dat derhalve Na OH verbruikt is. Daar het phosphaat in de oorspronkelijke vloeistof uitsluitend voorhanden was als $Na_2 HPO_4$, kon ik langs dezen weg gemakkelijk de hoeveelheid van deze stof bepalen uit het volumen der verbruikte Na OH-oplossing. De titratie geschiedde met phenolphtaleïne.

De gang der analyse was de volgende:

Het door middel van alcohol van eiwit bevrijde serum werd vermengd met enkele droppels phenolphtaleïne-oplossing. Dan werd verwarmd. Trad nu een roode kleur op, dan mocht daaruit worden opgemaakt dat geen $Na H_2 PO_4$ aanwezig was; trad daarentegen de roode kleur niet op, dan werden enkele droppels eener $^1/_{20}$ normaal KOH-oplossing toegevoegd, totdat al het $Na H_2 PO_4$ was omgezet in $Na_2 HPO_4$, hetgeen was waar te nemen aan de verschijning van de roode kleur. De hoeveelheid van de toegevoegde KOH-oplossing was dan een maat voor de hoeveelheid $Na H_2 PO_4$.

Nu werd $H_2 SO_4$ in overmaat toegevoegd en de vloeistof gekookt; hierdoor ging het $Na_2 CO_3$ over in $Na_2 SO_4$. De hoeveelheid hiervoor verbruikt, werd bepaald door het H_2SO_4 met KOH terug te titreeren. Na de titratie was de vloeistof dan een weinig rood door het droppeltje KOH, dat in overmaat moest toegevoegd worden om aan te toonen dat het vrije $H_2 SO_4$ verzadigd was.

Al het phosphaat was nu als $Na_2 HPO_4$ in de vloeistof voorhanden, en thans kon een bekende hoeveelheid Na OH en verder Ba Cl_2 toegevoegd worden. Nadat dit geschied was, werd de vloeistof gefiltreerd en getitreerd en uit de verbruikte hoeveelheid Na OH, de quantiteit $Na_2 HPO_4$ afgeleid.

Een voorbeeld tot opheldering:

1. 50 cM_3 serum worden verdund met 100 cM_3 alcohol van 95 pCt.; van het helder gele filtraat worden 50 cM^3 afgemeten met een pipet en in een groote reageerbuis ver-

hit. Vervolgens worden 8 droppels lakmoïd oplossing toegevoegd en nu liet ik zoolang $H_2 SO_4$ oplossing $^1/_{20}$ norm. bijdroppelen, totdat de vloeistof rood werd. Hiertoe waren noodig 7.73 cM^3 $^1/_{20}$ norm. $H_2 SO_4$.

Deze hadden dus gediend om het $Na_2 CO_3$ tot $Na_2 SO_4$ en het $Na_2 HPO_4$ te veranderen in $Na H_2 PO_4$.

2. Thans werden weer 50 cM^3 der alcoholische vloeistof genomen, 10 droppels der phenolphtaleïne-oplossing toegevoegd en werd het mengsel gekookt. Om de roode kleur te voorschijn te roepen, d. w. z. om het aanwezige $Na H_2PO_4$ om te zetten in $Na_2 HPO_4$ werden verbruikt 0.12 cM^3 $H_2 SO_4$ $^1/_{20}$ normaal.

3. Vervolgens liet ik 6 cM^3 $^1/_{20}$ norm. zwavelzuur toevloeien, verwarmde om het CO_2 te verdrijven en titreerde het KOH totdat een roode kleur te voorschijn trad. Hiertoe waren noodig 1.37 cM^3 $^1/_{20}$ norm. KOH. Er waren dus verbruikt $6 - 1.37 = 4.63$ cM^3 $^1/_{20}$ norm. $H_2 SO_4$.

Aangezien nu blijkens de titratie met lakmoïd voor het $Na_2 CO_3$ en het $Na_2 HPO_4$ verbruikt waren 7.73 cM^3 $^1/_{20}$ norm. $H_2 SO_4$ en blijkens de hier onder 3 beschreven titratie 4.63 cM^3 voor het $Na^3 CO_3$, moeten dus voor het Na_2HPO_4, $7.73 - 4.63 = 3_11$ cM^3 verbruikt zijn.

4. Om dit te contorleeren voegde ik thans bij de even rood gekleurde vloeistof, (onder 3 verkregen), 5 cM^3 $^1/_{20}$ normaal Na OH en 10 cM^3 $Ba Cl_2$-oplossing, filtreerde de thans 60 cM^3 bedragende vloeistof en titreerde 50 cM^3 op de gewone wijze met phenolphteleine, en zwavelzuur. Er waren nu noodig 1.5 cM^3 $^1/_{20}$ norm. H_2SO_4, d. i. berekend op 68 cM^3, 2,03 cM^3; trekt men dit af van 5 cM^3, dan blijkt verbruikt te zijn $5 - 2{,}03 =$ **2,97** cM^3 $^1/_{20}$ norm. Na OH. Dit is dus de hoeveelheid $^1/_{20}$ norm. Na OH, die noodig was om het Na_2HPO_4 om te zetten in Na_2PO_4 (volgens de bovengenoemde vergelijking).

Deze hoeveelheid stemt goed overeen met de hoeveelheid zuur welke noodig was om Na_2HPO_4 om te zetten in $Na H_2PO_4$, nl. **3,1**.

Een tweede proef met 50 cM^3 van hetzelfde serum op volkomen gelijke wijze verricht, gaf de volgende resultaten

voor de proef onder 1 . . . 7,69 cM[4] H_2SO_4 $^1/_{20}$ normaal
» » » » 2 . . . 0,13
» » » » 3 . . . 4.68
waaruit bleek dat het verschil van 1 en 3, bedroeg 7,69—4,68 = **3,01** terwijl bij de proef onder 4 werd gevonden **2,92** cM³.

De cijfers van de tweede proef stemmen dus goed overeen met die der eerste.

Hoe scherp de titratie met lakmoïd en phenolphtaleïne in het door alcohol van eiwit bevrijde serum ook moge zijn, tot mijn spijt hebben contrôleproeven mij moeten leeren, dat wanneer men eerst het alkaligehalte van serum bepaalt en vervolgens bij een nieuw hoeveelheid van hetzelfde serum een bekende quantiteit alkali voegt, en eindelijk het alkaligehalte van de aldus verkregen vloeistof bepaalt, het toegevoegde alkali niet geheel wordt teruggevonden.

Wel zijn de resultaten constant, waar men experimenteert met gelijke hoeveelheden en wel blijkt het, dat wanneer men bij serum slechts een geringe hoeveelheid alkali voegt, de titratie met lakmoïd een verhooging van alkaliciteit doet kennen, maar het totaal der toegevoegde hoeveelheid alkali wordt niet teruggevonden. Voor vergelijkende bepalingen van het alkaligehalte kan men echter de praecipitatie met alcohol met nut gebruiken, indien men maar de relatieve hoeveelheden alcohol gelijk neemt.

Uit de proeven op p. 380 kan dit blijken.

Geldt nu het bedoelde dificit alleen het toegevoegde alkali of ook het phosphorzuur. Het laatste is uit mijn proeven gebleken, niet het geval te zijn.

Intusschen stel ik mij voor, de alkalibepaling van het serum, elders uitvoeriger te behandelen.

Voor dit onderzoek komt mij het gezegde voor, voldoende te zijn.

β. Bepaling van het wateraantrekkend vermogen van alkalische vloeistoffen.

Zooals boven op p. 364 werd opgemerkt, was het niet te

verwachten, dat de bepaling van het wateraantrekkend vermogen van alkalische vloeistoffen geheel op de gewone wijze zou kunnen plaats hebben.

De volgende proeven mogen dit bewijzen.

a. 100 cM^3 serum worden vermengd met 20 cM^3 water
b. 100 cM^3 " " " " 20 cM^3 KOH ($^1/_{10}$ norm.)
c. 100 cM^3 " " " " 20 cM^3 KOH ($^1/_{20}$ norm.)

Van ieder der drie mengsels worden 9 maal 5 cM^3 afgemeten en deze verdund met 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.75, 3 en 3,25 water. Bij de mengsels worden drie droppels van het oorspronkelijke gedefibrineerde bloed gevoegd.

Het blijkt nu, dat in *a* een weinig kleurstof is uitgetreden bij verdunning van 5 cM^3 serum met 1.25 cM^3 water, maar niet bij verdunning met 1 cM^3 water;

dat in *b*. een weinig kleurstof is uitgetreden bij verdunning van 5 cM^3 serum met 2,75 cM^3 water, maar niet bij verdunning met 2.5 cM^3 water;

dat in *c* een weinig keurstof is uitgetreden bij verdunning van 5 cM^3 serum met 2.50 cM^3, maar niet bij verdunning met 2.25 cM^3 water.

Daar nu de bloedlichaampjrs van het oorspronkelijke bloed uittreden van kleurstof vertoonen in Na Cl vau 0.64 pCt., maar niet in Na Cl-oplossing van 0.65 pCt., zou men allicht geneigd zijn, uit de bovenstaande uitkomsten op te maken, dat serum *a*. een wateraantrekkend vermogen bezit van:

$$\frac{5 + 1.125}{5} \times 0.645 \times \frac{101}{58.5} = 1.34,$$

serum *b*. een wateraantrekkend vermogen bezit van;

$$\frac{5 + 2.625}{5} \times 0.645 \times \frac{101}{58.5} = 1.67$$

serum *c*. een wateraantrekkend vermogen bezit van:

$$\frac{5 + 2.375}{5} \times 0.645 \times \frac{101}{58.5} = 1.62.$$

Kunnen de groote verschillen in wateraantrekkend vermogen van serum *a*, *b* en *c* worden verklaard door het wateraantrekkend vermogen van het in *b* en *c* toegevoegde KOH?

Gaan we eens na, hoeveel het bedraagt.

1 Liter $^1/_{10}$ normaal KOH bevat 5.6 gr. KOH, dus 20 cM^3 bevatten $\frac{20}{1000} \times 5.6 = 0.112$ gr. KOH. Deze bevinden zich in (100 + 20) cM^3 serum *b*. Dit serum bevat dus $0.112 \times \frac{100}{120} = 0.0933$ pCt. KOH. Deze vertegenwoordigen een wateraantrekkend vermogen van eene $0.0933 \times \frac{101}{56} \times \frac{1}{3} =$ 0.0501 percents KNO_3-oplossing. (56 is het moleculairgewicht van KOH, 101 dat van KNO_3). Hieruit volgt, dat aan het wateraantrekkend vermogen van serum *b* het KOH een aandeel heeft van 0.05 In serum *c* moet dit slechts 0.024 bedragen. Deze beide getallen kunnen echter de verschillen 1.67 — 1.34 = 0.33 en 1.62 — 1.34 = 0.28 niet verklaren.

Reeds in den aanvang van caput *d* (zie p. 364) sprak ik het vermoeden uit, dat de bepaling van het wateraantrekkend vermogen zooals deze zooeven werd uitgevoerd, bij alkalische vloeistoffen tot foutieve resultaten moest leiden. De oorzaak ligt in de omstandigheid, dat de bloedlichaampjes in de mengsels van serum *b* en in die van serum *c* andere zijn dan in die van serum *a*; in serum *b* en *c* toch staan ze onder den invloed van een hooger alkaligehalte dan in serum *a*. En de proeven onder *b* (zie p. 359) hebben duidelijk aangetoond, dat het uittreden van kleurstof uit bloedlichaampjes in hooge mate afhankelijk is van het alkaligehalte der vloeistof, waarin ze vertoeven of vertoefden.

Dat hierin nu werkelijk de oorzaak ligt voor de bewuste verschillen, zal ik op twee wijze aantoonen.

1. Eerst werd de Na Cl-oplossing bereid, die isotonisch was met het oorspronkelijke serum. Van deze 0.948 percents oplossing werden 100 cM^3 vermengd met 20 cM^3

water, om een vloeistof te krijgen, isotonisch met serum *a*. En om de vloeistoffen te bereiden, overeenkomende met serum *b* en *c*, vermengde ik de 0,948 percents NaCl-solutie resp. met 20 cM^3 KOH-opl. $^1/_{10}$ normaal en $^1/_{20}$ normaal.

Daarna werden van de drie vloeistoffen 9 maal 5 cM^3 afgemeten en verdund met 1. 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 275, 3, en 3.25 cM^3 water. De resultaten waren volkomen gelijk aan die, welke ik bij het serum *a*, *b* en *c* had verkregen.

Voor de eerste Na Cl-solutie had kleurstof-uittreden plaats in het mengsel van 5 cM^3 der solutie + 1.25 cM^3 water.

Voor de tweede Na Cl-solutie (waarin KOH), had kleurstof-uittreden plaats in het mengsel van 5 cM^3 der solutie + 2.75 cM^3 water.

Voor de derde Na Cl-solutie (waarin ook KOH) had kleurstof-uittreden plaats in het mengsel van 5 cM^3 der solutie + 2.5 cM^3 water.

2. De tweede methode, welke ook toegepast kan worden voor de bepaling van het wateraantrekkend vermogen van vloeistoffen, waarin zich alkali bevindt, bestaat daarin, dat men het in *b* en *c* toegevoegde alkali nauwkeurig verzadigt met een aequivalente hoeveelheid zuur en dan het wateraantrekkend vermogen van de mengsels bepaalt.

Ik voegde dus bij 20 cM^3 serum *b*, 10 cM^3 $^1/_{10}$ normaal HCl en bij 50 cM^3 serum *c*, 10 cM^3 $^1/_{20}$ normaal HCl en bepaalde daarna, met hoeveel water ik 5 cM^3 van beide mengsels moest verdunnen om uittreden van kleurstof uit de oorspronkelijke bloedlichaampjes te veroorzaken.

Het bleek, dat 5 cM^3 serum *b*, met 0,75 cM^3 water vermengd, uittreden van kleurstof veroorzaakt; dat daarentegen 5 cM^3 serum *b* + 0.5 cM^3 water daartoe niet in staat was. De resp. mengsels voor serum *c* waren: 5 cM^3 serum + 0.5 cM^3 water en 5 cM^3 serum *c* + 0.25 cM^3 water.

Hieruit liet zich voor het wateraantrekkend vermogen van serum *b* berekenen

$$\frac{5 + 0.625}{5} \times \frac{0.65 + 0.64}{2} \times \frac{101}{58.5} = 1.25,$$

en voor dat van serum *c*

$$\frac{5 + 0.375}{5} \times \frac{0.65 + 0.64}{2} \times \frac{101}{58.5} = 1.195$$

Van de waarden 1.25 en 1.195 komen echter zekere hoeveelheden op rekening van het door KOH en HCl gevormde zout. Voor KOH was dit bedrag naar de bovenstaande berekening in serum *b*, 0.05 en in serum *c* 0.025. Voor het met HCl gevormde zout wordt het bedrag, in verband met de wet der partieele isotonische caefficienten van DE VRIES 3 $\times$ 0.05 $=$ 0.15 en 3 $+$ 0,025 $=$ 0,075.

De zooeven gevonden cijfers voor het wateraantrekkend vermogen moeten dus worden 1.25 — 0.15 $=$ 1.1 en 1.195 — 0.075 $=$ 1.12. 1.1 en 1.12 is dus het water-aantrekkend vermogen van serum *b* en *c*, na aftrek van het aandeel, dat het KOH en HCl er op hadden. Maar nu is nog geen rekening gehouden met de omstandigheid dat de 50 cM^3 met 10 cM^3 vloeistof verdund waren; zoodat eigenlijk het water aantrekkend vermogen van

$$\text{serum } b \text{ wordt } \frac{50 \times 10}{50} \times 1.1 = 1{,}32,$$

$$\text{en van serum } c, \frac{50 \times 10}{50} \times 1.12 = 1.34,$$

getallen die volkomen overeenstemmen met hetgeen voor serum *a* werd gevonden (1.34).

Thans kunnen we de vraag, onder *d* gesteld, oplossen, de vraag nl. of na inwerking van zuur of alkali op het bloed, tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum een wisseling plaats heeft in isotonische verhouding.

Ter beantwoording dezer vraag werden driemaal 180 cM^3 bloed afgemeten en aan zich zelve overgelaten. Na verwijdering van het grootste gedeelte van het bovenstaande heldere serum, werd het laatste vermengd resp. met 20 cM^3

$^1/_{10}$ norm. KOH-oplossing en 20 cM^3 $^1/_{20}$ norm. KOH-solutie. Dan werden de drie aldus verkregen mengsels geschud met de bijbehoorende bloedlichaampjes en dat schudden, na bezinking der bloedlichaampjes een paar malen herhaald. Op deze wijze hadden de KOH-oplossingen gelegenheid, voldoende op de bloedlichaampjes in te werken.

Ik had dus de volgende mengsels:

α 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 water.

β 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{10}$ norm. KOH-oplossing.

γ 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{20}$ norm. KOH-oplossing.

Bij deze mengsels werd, nadat de bloedlichaampjes waren bezonken, het bovenstaande serum verwijderd. Was nu inderdaad in α, β en γ, in weerwil van de ruime wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum, zooals deze onder *b* duidelijk gebleken is, het wateraantrekkend vermogen van bloedlichaampjes en serum onveranderd gebleven. dan moest de wisseling hebben plaats gehad in isotonische verhouding. Om dit uit te maken, moest het wateraantrekkend vermogen van serum α, β en γ worden bepaald. Doch dit kon slechts geschieden, nadat de alkaliciteit van serum β en γ gelijk gemaakt was aan die van serum α.

De methode, welke het meest voor de hand lag, was: het alkaligehalte van serum α, β en γ te bepalen en bij serum β en γ, zooveel zuur te voegen, dat het alkaligehalte gelijk werd aan dat van α. Maar zooals we boven aantoonden, laat de nauwkeurigheid van de methoden om de *absolute* hoeveelheid alkali in serum te bepalen te wenschen over. We moesten dus van een andere methode gebruik maken.

Hiertoe maakten we mengsels van 5 cM^3 serum β met 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 en 1 cM^3 $^1/_{20}$ normaal zwavelzuur en voegde daarbij 2 droppels van de bezonken bloedlichaampjes van bloed α. Na schudden bezonken de lichaampjes, en werden ze andermaal vermengd met een Na Cl-oplossing van 0,65 pCt., de vloeistof waarin de bloedlichaampjes van bloed α kleurstof begonnen te verliezen. Het bleek nu, dat het laatste ook het geval was met de

bloedlichaampjes, die vertoefd hadden in het mengsel 5 serum β + 0.7 cM³ $^1/_{20}$ normaal zwavelzuur. Hieruit volgde, dat de alkaliciteit van dit mengsel gelijk was aan die van serum α. Bij 50 cM³ serum β moesten dus 7 cM³ $^1/_{20}$ normaal zwavelzuur worden gevoegd, om de alkaliciteit van serum α er aan terug te geven.

Op dezelfde wijze werd voor 50 cM³ serum γ gevonden een hoeveelheid $^1/_{20}$ normaal zwavelzuur, gelegen tusschen 5 en 6 cM³, dus 5.5 cM³.

Thans konden we het wateraantrekkend vermogen van de drie serumsoorten van onderling gelijk gemaakt alkaligehalte zoeken.

Het bleek, dat 5 cM³ serum α met 2.5 cM³ serum β met 1.625 en 5 cM³ γ met 1.5 cM³ water moesten verdund worden om uittreden van een weinig bloedkleurstof te doen plaats hebben. Hetzelfde werd teweeggebracht door Na Cl-solutie van 0.65 pCt.

Het wateraantrekkend vermogen was dus:

$$\text{van serum } \alpha \; \frac{5 + 1.625}{5} \times 0.65 \times \frac{101}{58.5} = 1.57$$

$$\text{van serum } \beta \; \frac{5 + 1.625}{5} \times 0.65 \times \frac{101}{58.5} = 1.49$$

$$\text{van serum } \gamma \; \frac{5 + 1.625}{5} \times 0.65 \times \frac{101}{58.5} = 1.46;$$

Maar bij 100 serum β zijn 14 cM³ verdund zuur gevoegd, waardoor het volume 114 is geworden. Eigenlijk is dus het wateraantrekkend vermogen niet 1.49 maar 149 $\times \frac{114}{100} = 1.698$.

Voor serum γ wordt het volgens dezelfde redeneering $1.46 \times \frac{111}{100} = 1.62$.

Tot dit wateraantrekkend vermogen heeft echter bijgedragen het zout, dat ontstond door toevoeging van verdund zuur.

Gaan we eens na hoeveel deze bijdrage is voor serum β

14 cM³ $^1/_{20}$ norm. KOH bevatten 0.041 gr. KOH.

Deze zijn verzadigd met H_2SO_4. Het daardoor gevormde zout vertegenwoordigt een wateraantrekkend vermogen van $0.041 \times \frac{101}{58.5} \times \frac{4}{3} \times \frac{100}{114} = 0.08.$

Dit getal wordt voor serum, naar dezelfde berekening 0.066. Trekt men nu beide getallen af van 1.69 en 1.62, dan houdt men voor het wateraantrekkend vermogen van serum β over: 1.69 — 0.081 = **1.61** en van serum γ, 1.62—0.066 = **1.55**.

Deze getallen komen goed overeen met dat van het wateraantrekkend vermogen van serum α nl. **1.57**.

Toch is volgens deze resultaten nog een verschil van 0.04 op te merken tusschen het wateraantrekkend vermogen van serum α en serum β, terwijl door onze methode van experimenteeren nog verschillen van **0.02** kunnen worden aangetoond. Ik heb daarom de bepalingen met hetzelfde bloed herhaald. De berekening zal niet mededeelen, alleen de uitkomsten.

Naar deze proeven bedroeg:

het wateraantrekkend vermogen van serum α **1.58**
» » » » » β 1.61
» » » » » γ 1.54

Dus een gelijkluidend resultaat.

De oorzaak voor de geringe afwijking van serum β is waarschijnlijk gelegen in de omstandigheid, dat voor proef β de hoeveelheid alkali wel wat groot genomen is (180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{20}$ norm. alkali). Het bovenstaande serum toch had een zwak rood tintje, hetgeen niet het geval was met serum γ.

Intusschen kan men met de resultaten van proef β tevreden zijn, wanneer men in aanmerking neemt, dat, terwijl het chloor van 100 cM^3 serum α overeenkwam met 92.3 cM^3 $^1/_{10}$norm. $AgNO_3$, het chloor van 100 cM^3 serum β beantwoordde aan 101.9 cM^3 $^1/_{10}$ norm. $AgNO_3$ (Vergelijk ook de chloorbepalingen op p. 360 boven). Alleen door het uittreden van chloriden uit de bloedlichaampjes, zou dus het wateraantrekkend vermogen van serum β 0.096 hooger moeten zijn dan van serum α. Chloorbepalingen van serum γ deden een stijging in wateraantrekkend vermogen van 0.064 kennen.

Het interesseerde mij te weten, in welken zin zich het phosphorzuur gedroeg bij de inwerking van alkali, ofschoon het wegens de geringe hoeveelheid, waarin het in het serum voorkomt, geen grooten invloed kan uitoefenen op het wateraantrekkend vermogen. Naar hetgeen ik boven mededeelde, kon de methode volgens welke ik de eiwitstoffen uit het serum neersloeg, nl. door alcohol, hier zonder bezwaar gebruikt worden:

a. 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 water.
b. 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{10}$ norm. NaOH.
c. 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{20}$ norm. NaOH.

Van het serum *a*, *b* en *c* werden 100 cM^3 neergeslagen door 200 cM^3 alcohol van 95 pCt.

Bij titratie met lakmoïd bleken voor 50 cM^3 der alcoholische vloeistof *a* noodig te zijn, 7.9 cM^3 $^1/_{20}$ norm. zwavelzuur;

voor 50 cM^3 der vloeistof *b*, 11.3 cM^3 $^1/_{20}$ norm. zwavelzuur

en voor 50 cM^3 der vloeistof *c*, 9.5 cM^3 $^1/_{20}$ norm. zwavelzuur.

Bij titratie met phenolphtaleïne bleek, voor de ontleding van Na_2CO_3 te zijn verbruikt:

bij 50 cM^3 vloeistof *a*, 5.2 cM^3,
bij 50 cM^3 vloeistof *b*, 7.6 cM^3,
bij 50 cM^3 vloeistof *c*, 6.2 cM^3.

Waaruit volgt, dat in 50 cM^3 vloeistof *a* een hoeveelheid Na_2HPO_4 voorkwam, die door 7.9—5.2 = **2.7** cM^3 $^1/_{20}$ norm. H_2SO_4 werd gemaakt tot NaH_2PO_4.

Voor vloeistof *b* bedroeg die hoeveelheid 11.3—7.6 = **3.7** cM^3 en voor vloeistof *c* bedroeg die hoeveelheid 9.5—6.2 = **3.3** cM^3.

Hieruit blijkt, dat tengevolge van de inwerking van alkali op het bloed, het phosphorzuurgehalte van het serum stijgt. Bij inwerking eener sterke KOH-oplossing is deze stijging aanzienlijker dan bij inwerking van dezelfde hoeveelheid eener zwakkere KOH-solutie.

De hier beschreven experimenten heb ik ook verricht voor zuur. Ik gebruikte hetzelfde bloed, als voor het onderzoek met alkali was aangewend.

b'. 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{10}$ norm. $H_2 SO_4$
c'. 180 cM^3 bloed + 20 cM $^1/_{20}$ norm. $H_2 SO_4$
de titraties met lakmoïd en phenolphtaleïne gaven resp. voor 50 cM^3 b', 4.2 en 2.2; voor 50 cM^3 c', 5.7 en 3.4.

De verschillen, aanwijzende de hoeveelheid phoshorzuur bedroegen, dus **2** en **2,3**. Deze getallen, vergeleken met het getal 2.7, wijzen duidelijk aan, dat door inwerking van zuur op bloed, het serum phosphorzuur afgeeft aan de bloedlichaampjes.

Om de onder *d* gestelde vraag ook voor zuur op te lossen, werden volgens dezelfde methode als ik boven voor alkali beschreef, drie mengsels bereid.

α'. 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 water.
β'. 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{10}$ norm. $H_2 SO_4$
γ'. 180 cM^3 bloed + 20 cM^3 $^1/_{20}$ norm. $H_2 SO_4$

Nadat in de drie mengsels de bloedlichaampjes waren bezonken, werd het serum verwijderd. Van de drie serumsoorten α', β' en γ' moest nu evenals dit bij de inwerking van alkali was geschied, het alkali gehalte gelijk gemaakt worden en wel, aan dat van serum α'. Daartoe werden bij 5 cM^3 serum β', 0,3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.9 en 1 cM^3 $^1/_{20}$ normaal KOH gevoegd en daarna 2 droppels van de bezonken bloedlichaampjes van bloed α. Nadat de bloedlichaampjes waren bezonken, werd de bovenstaande vloeistof verwijderd en werden de bloedlichaampjes vermengd met Na Cl-oplossing van 0.63 pCt., de vloeistof, waarin de bloed-

lichaampjes van bloed α kleurstof begonnen te verliezen. Het bleek nu, dat het laatste ook het geval was met de bloedlichaampjes, die vertoefd hadden in het mengsel gelegen tusschen 5 serum β' + 0.1 en 5 serum β' + 0.9. Voor serum γ' was het bedoelde mengsel 5 serum γ' + 0.5. Derhalve hadden 5 serum α', 5 serum β' + 0.95 $^1/_{20}$ norm. KOH en 5 serum β' + 0.5 $^1/_{20}$ norm. KOH hetzelfde alkaligehalte.

Het wateraantrekkend vermogen was voor:

$$\text{serum } \alpha' \ldots \frac{5 + 1.75}{5} \times 0.63 + \frac{101}{58.5} = 1.47,$$

$$\text{serum } \beta' \ldots \frac{5 + 1,25}{5} \times 0.63 + \frac{101}{58.5} = 1.36$$

$$\text{serum } \gamma' \ldots \frac{5 + 1.375}{5} \times 0.63 + \frac{101}{58.5} = 1.38$$

Daar echter bij de toevoeging van alkali, per 100 cM^3 serum β', 18 cM^3 vloeistof zijn toegevoegd en per 100 cM^3 γ', 10 cM^3 vloeistof, wordt het wateraantrekkend vermogen van β', $1.36 \times \frac{118}{100} = 1.60$ en van γ', $1.38 + \frac{110}{100} = 1.52$.

Maar door de toevoeging van KOH is zout gevormd.
Voor β' bedraagt hiervan het wateraantrekkend vermogen 0.1
Voor γ' » » » » » 0.056
zoodat naar deze berekening het wateraantrekkend vermogen wordt van β', 1.6—0.1 = 1.5 en van γ', 1.52 — 0.056 = 1.46, welke getallen 1.5 en 1.46 goed overeenstemmen met 1.47.

Deze uitkomst bewijst, dat na inwerking van zuur op bloed een wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum plaats grijpt in isotonische verhouding. De uitkomst stelt nog een ander feit in het licht.

Boven (onder *a* en *b*) werd aangetoond, dat na inwerking

van zuur of alkali op het bloed, de grenzen der Na Cl-oplossingen, waarin de bloedlichaampjes kleurstof beginnen af te geven, andere zijn dan vóór de inwerking Dit zou daaraan kunnen worden toegeschreven, dat de wateraantrekkende kracht (osmotische spanning) der bloedlichaampjes een verandering had ondergaan of dat de permeabiliteit der bloedlichaampjes gewijzigd was. Ware de eerste verklaring de juiste, dan moest ook het serum, waarin de bloedlichaampjes toch in evenwicht verkeeren, in wateraantrekkende kracht veranderd zijn En dit is, volgens hetgeen zooeven gebleken is, niet het geval. Daar een derde verklaring niet denkbaar schijnt, moet men dus aannemen, dat, door inwerking van zuur of van alkali op het bloed, de permeabiliteit der bloedlichaampjes een wijziging ondergaat, en wel, blijkens de experimenten, beschreven onder *a* en *b*, voor alkali in tegengestelden zin als voor zuur.

Zwavelzuur en zeutzuur veranderen de permeabiliteit in denzelfden zin als koolzuur *).

e. *Blijven de bloedlichaampjes, nadat alkali of zuur er op heeft ingewerkt, de wetten der isotonische coëfficienten volgen?*

Nadat het mij gebleken was, dat door den invloed van alkali en van zuur de permeabiliteit zich wijzigde, interesseerde het mij te weten of de lichaampjes na deze wijziging nog de wetten der isotonische coëfficienten volgden.

Ik nam:

A. 50 cM^3 serum, verdunde die met 10 cM^3 water en voegde bij het mengsel 30 cM^3 bloedlichaampjes;

B. 50 cM^3 serum, verdund die met 10 cM^3 $^1/_{10}$ normaal KOH-oplossing en voegde bij het mengsel 30 cM^3 bloedlichaampjes;

C. 50 cM^3 serum, verdunde die met 10 cM^3 $^1/_{10}$ normaal H_2SO_4-oplossing en voegde bij het mengsel 30 cM^3 bloedlichaampjes.

---

*) *Verslagen* en *Mededeelingen*, enz., 3de Reeks, Dl. IX, p. 197.

Nadat de bloedlichaampjes met de drie mengsels waren geschud en weer bezonken waren, werden ze met Na Cl- KNO_3- en rietsuiker-oplossingen onderzocht.

De bloedlichaampjes van *A* werden echter alleen met Na Cl-oplossingen ingezet, omdat uit vroegere experimenten bekend was *), dat, wanneer water op bloed heeft ingewerkt (waarbij natuurlijk door behoorlijke voorzorgen, uittreden van kleurstof uit de bloedlichaampjes vermeden wordt), de bloedlichaampjes de wetten der isotonische coëfficienten blijven volgen.

De volgende tabel geeft een overzicht der resultaten.

TABEL VI.

	Grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof door NaCl-oplossingen.	Grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof door KNO_3-oplossingen.	Grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof door rietsuiker-oplossingen.
C 50 cM^3 serum + 10 cM^3 water + 30 cM^3 bloed.	0.66 en 0.67 %		
B 50 cM^3 serum + 10 cM^3 KOH-opl. 1/10 norm. + 30 cM^3 bloed.	0.57 en 0.58 %	0.97 en 0.98 % isoton. met NaCl 0.57 en 0.58 %	4.87 en 4.97 % isoton. met NaCl 0.57 en 0.58 %
C 50 cM^3 serum + 10 cM^3 H_2SO_4-opl. 1/10 norm. + 30 cM^3 bloed.	0.74 en 0.75 %	1.27 en 1.29 % isoton. met NaCl 0.74 en 0.75 %	6.51 en 6.62 % isoton. met NaCl 0.74 en 0.75 %

Uit deze tabel blijkt duidelijk, dat de bloedlichaampjes in weerwil van de aanzienlijke wijzigingen, welke de grenzen voor het uittreden en niet-uittreden van kleurstof ondergaan door inwerking van alkali en van zuur, de wetten der isotonische coëfficienten blijven volgen.

Wat betreft de rietsuiker-oplossingen, zij hier opgemerkt, dat de met alkali of met zuur behandelde bloedlichaampjes,

*) Over de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes, enz. *Verslagen en Mededeelingen* enz. 3e Reeks, Dl. VII, p. 15.

in alle concentraties der eerst bedoelde soluties, spoedig hun kleurstof verliezen. Gelukkig hebben de bloedlichaampjes nog eenigen tijd om te bezinken, voordat ze kleurstof afgeven; zoodat in de suikeroplossing, waaraan de lichaampjes geen kleurstof afgeven, bovenaan nog een kleurlooze band zichtbaar is.

f. *Beschermende invloed van alkali op het uittreden van bloedkleurstof, veroorzaakt door inwerking van galzure zouten, gal en chloorammonium op bloed.*

Onder *b* was gebleken, dat na inwerking van KOH op bloedlichaampjes, de laatsten nog geen kleurstof verliezen in zoutsoluties, waarin de onveranderde bloedlichaampjes dit wel doen. Een blik op tabel III laat hieromtrent geen twijfel bestaan. Het KOH beschermt dus als het ware de bloedlichaampjes tegen de kleurstof onttrekkende werking van verdunde Na Cl-soluties.

Zou het KOH denzelfden invloed uitoefenen, wanneer de bloedlichaampjes blootgesteld waren aan de kleurstofonttrekkende werking van galzure zouten, gal of chloorammonium?

Om deze vraag te beantwoorden, vermengde ik 5 cM^3 serum met 0.5, 1, 1.5 en 2 cM^3 eener 5-percentsoplossing van galzure zouten (bereid uit ossengal) en schudde deze mengsels met 3 droppels bloedlichaampjes (bezonken in gedefibrineerd paardebloed). Na bezinking der bloedlichaampjes bleek, dat in het mengsel 5 cM^3 serum + 0.5 cM^3 water geen uittreden van kleurstof had plaats gehad, hetgeen wel het geval was in het mengsel 5 cM^3 serum + 1 cM^3 water en sterker in het mengsel, waarin 1.5 cM^3 galzure zouten waren aangewend.

Om nu den invloed van alkali te beproeven, voegde ik bij 5 cM^3 serum, in plaats van 1 cM^3 eener oplossing van galzure zouten, slechts 0.5 cM^3, maar thans van de dubbele concentratie, dus van 10 pCt. en verder 0.5 cM^3 $^1/_{10}$ normaal KOH oplossing. Het bleek echter, dat het KOH de bloedlichaampjes niet had beschermd tegen den invloed der

galzure zouten. Misschien, dacht ik, is dit slechts schijnbaar het geval en is de hoeveelheid KOH zoo groot geweest, dat ze zelve een ongunstigen invloed op de bloedlichaampjes uitoefende. Daarom herhaalde ik de proef, maar voegde nu in plaats van 0.5 cM^3 $^1/_{10}$ normaal oplossing, 0.5 cM^3 eener $^1/_{20}$ normaal solutie toe. En nu was inderdaad geen kleurstof uitgetreden. Hieruit volgt, dat het KOH de bloedlichaampjes heeft beschermd tegen de inwerking der galzure zouten.

Was een zwakkere KOH-oplossing tot hetzelfde in staat? Om dit na te gaan vermengde ik 5 cM^3 serum + 0.5 cM^3 eener 10-percents oplossing van galzure zouten + 0.5 cM^3 KOH $^1/_{40}$ normaal + 3 droppels bloedlichaampjes. Maar nu had wèl uittreden van kleurstof plaats, zoodat de vermeerdering in alkali-gehalte, welke het serum moet ondergaan, opdat de bloedlichaampjes zullen kunnen weerstand bieden aan serum, waarin $^5/_6$ pCt. galzure zouten voorkomen, ligt tusschen $\frac{0.5}{5+1} \times \frac{1}{10}$ en $\frac{0.5}{5+1} \times \frac{1}{40}$, d. i. tusschen $\frac{1}{120}$ en $\frac{1}{480}$ normaal.

Ik wenschte nu ook te weten, of de bloedlichaampjes eveneens tegen oplossingen van galzure zouten sterker dan $^5/_6$ pCt. konden gevrijwaard worden. Het was gebleken, dat het mengsel 5 cM^3 serum + 1.5 cM^3 eener 5 pCts. oplossing van galzure zouten, uittreden van kleurstof veroorzaakte.

Er werden thans drie mengsels bereid:

a. 5 cM^3 serum + 0.75 cM^3 opl. van galzure zouten van 10 pCt. + 0.75 cMs $^1/_{10}$ norm. KOH.

b. 5 cM^3 serum + 0.75 cM^3 opl. van galzure zouten van 10 pCt. + 0.75 cM^3 $^1/_{20}$ norm. KOH.

c. 5 cM^3 serum + 0.75 cM^3 opl. van galzure zouten van 10 pCt. + 0.75 cM^3 $^1/_{40}$ norm. KOH.

Bij alle drie mengsels werden 3 droppels bloedlichaampjes gevoegd.

Na bezinking der bloedlichaampjes waren alle drie vloei-

stoffen rood. Het minst rood was vloeistof *b*; en het was ook duidelijk, dat de roodheid daarvan veel zwakker was dan in het oorspronkelijke mengsel, waaraan geen KOH was toegevoegd (5 cM^3 serum + 1.5 cM^3 eener 5 percents oplossing van galzure zouten).

Uit deze proeven volgt, dat het KOH de bloedlichaampjes zooal niet heeft gevrijwaard, dan toch tot op zekere hoogte beschermd heeft tegen de kleurstof onttrekkende kracht van een $\frac{1.5}{5 + 1.5} \times 5 = 1.15$ percents oplossing van galzure zouten.

In het voorbijgaan zij hier opgemerkt, dat het serum als zoodanig met een vrij groote hoeveelheid galzure zouten kan vermengd worden alvorens het de roode bloedlichaampjes gaat vernietigen (volgens bovenstaande proeven, met $^5/_6$ pCt.) Ik heb die hoeveelheid ook eens ten opzichte van het geheele bloed bepaald.

Daartoe nam ik 10 cM^3 gedefibrineerd bloed, liet de bloedlichaampjes bezinken, verwijderde een deel van het serum en vermengde dit met de oplossingen der galzure zouten. De proeven met de resultaten volgen hieronder:

		RESULTAAT:
10 cM^3 bloed + 1 cM^3	eener 1 °/° opl. v. galz. zouten.	Serum kleurloos.
10 cM^3 bloed + 1 cM^3	" 2 " " " "	Serum kleurloos.
10 cM^3 bloed + 1 cM^3	" 3 " " " "	Serum kleurloos.
10 cM^3 bloed + 1 cM^3	" 4 " " " "	Serum rood.
10 cM^3 bloed + 1 cM^3	" 5 " " " "	Serum rood.
10 cM^3 bloed + 0.5 cM^3	" 8 " " " " + 0.5 cM^3 $^1/_{20}$ norm. KOH	Serum kleurloos.
10 cM^3 bloed + 0.5 cM^3	" 10 °/₀ opl. v. galz. zouten. + 0.5 cM^3 $^1/_{20}$ norm. KOH	Serum een weinigje rood.

Uit deze proeven ziet men, dat wanneer in gedefibrineerd bloed $^3/_{11}$ pCt. galzure zouten voorkomen, geen uittreden van kleurstof plaats heeft, maar dat dit wel het geval is, wanneer $^4/_{11}$ pCt. er in voorhanden zijn. Tevens blijkt, dat toevoeging van een weinig KOH overeenkomende met een

vermeerdering van het bloed in alkali gehalte van $\frac{1}{220}$ normaal) de bloedlichaampjes nog vrijwaart tegen de aanwezigheid van $^4/_{11}$ pCt. en bijna tegen de aanwezigheid van $^5|_{11}$ pCt galzure zouten.

Het interesseerde mij na te gaan, in hoeverre alkali op de inwerking van gal, invloed uitoefende.

Ik gebruikte hiertoe gal van het varken, terwijl als bloed weer dat van het paard diende.

De proeven werden op de bij de galzure zouten beschreven wijze verricht. Ik kan dus volstaan met de vermelding der resultaten.

	Resultaat:
10 cM³ bloed + 0.1 cM³ gal + 0.5 cM³ water.	Serum kleurloos.
10 cM³ bloed + 0.2 cM³ gal + 0.5 cM³ water.	Serum een weinig rood.
10 cM³ bloed + 0.3 cM³ gal + 0.5 cM³ water.	Serum rood.
10 cM³ bloed + 0.4 cM³ gal + 0.5 cM³ water.	Serum rood.
10 cM³ bloed + 0.1 cM³ gal + 0.5 cM³ $^1/_{20}$ norm. KOH.	Serum kleurloos.
10 cM³ bloed + 0.2 cM³ gal + 0.5 cM³ $^1/_{20}$ norm. KOH.	Serum kleurloos.
10 cM³ bloed + 0.3 cM³ gal + 0.5 cM³ $^1/_{20}$ norm. KOH.	Serum kleurloos
10 cM³ bloed + 0.4 cM³ gal + 0.5 cM³ $^1/_{20}$ norm. KOH.	Serum rood.

De experimenten leeren: 1° dat gal reeds in veel geringere hoeveelheid de bloedlichaampjes aantast dan de galzure zouten; 2° dat KOH de bloedlichaampjes tegen de werking der gal in bescherming neemt.

Ten slotte wil ik nog de proeven vermelden, die ik over den invloed van chloorammonium op bloedlichaampjes heb genomen.

	Resultaat:
5 cM³ Serum + 0.5 cM³ (NH_4) Cl-oplossing van 1%	Serum kleurloos.
5 cM³ Serum + 1 cM³ " " " "	Serum rood.
5 cM³ Serum + 1.5 cM³ " " " "	Serum rood.
5 cM³ Serum + 2 cM³ " " " "	Serum rood.

	Resultaat:
5 cM^3 serum + 0.5 cM^3 (NH_4) Cl-opl. van 2 % + 0.5 cM^3 KOH-opl. $^1/_{10}$ norm.	Serum rood.
5 cM^3 serum + 0.5 cM_3 (NH_4) Cl-opl. van 2% + 0 5 cM_3 KOH-opl. $^1/_{20}$ norm.	Serum kleurloos.
5 cM_3 serum + 0.5 cM_3 (NH_4) Cl-opl. van 2 % + 0.5 cM_3 KOH-opl. $^1/_{40}$ norm.	Serum rood, (minder rood dan bij 5 serum + 1 cM_3 (NH_4) Cl van 1 %)

Uit deze resultaten blijkt, dat KOH de bloedlichaampjes beschermt tegen de schadelijke werking van $(NH_4Cl$, en dat onder de gege ven omstandigheden een vermeerdering van alkaligehalte, welke ligt tusschen $\frac{1}{120}$ en $\frac{1}{480}$ normaal, het gunstigst werkt.

Ik heb tevens nagegaan of de bloedlichaampjes ook tegen sterkere $(NH_4)Cl$-oplossingen konden beschermd worden door KOH. Inderdaad was dit ook het geval, hoewel het uittreden van kleurstof niet volkomen kon worden tegengegaan. De oorzaak moet wel hierin gezocht worden, dat het KOH spoedig zelf kleurstof uit de bloedlichaampjes doet treden, wanneer men zijn concentratie gaat verhoogen.

RESUMÉ EN BESLUIT.

Het bovenstaande onderzoek heeft in hoofdzaak tot de volgende resultaten geleid:

1. *Door inwerking van zuren en alkaliën op gedefibrineerd bloed heeft een wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum plaats.*

2. *In weerwil van een aanzienlijke wisseling blijft het wateraantrekkend vermogen van het serum en dus ook van de bloedlichaampjes onveranderd; hetgeen recht geeft tot het besluit, dat de werking van alkali en zuur op gedefibrineerd bloed berust op wijziging in de permeabiliteit der roode bloedlichaampjes.*

3. *De met zuur of alkali behandelde bloedlichaampjes blijven, ten opzichte van het uittreden van kleurstof door zoutoplossingen, de wetten der isotonische coëfficienten volgen. De wijziging der permeabiliteit heeft dus op het laatste geen invloed gehad.*

4 *Zuur en alkali wijzigen de permeabiliteit in tegengestelden zin.* Dit blijkt:

a. *Uit de vergelijking van de concentraties der zoutoplossingen, waarin de onveranderde en de met zuur of alkali behandelde bloedlichaampjes kleurstof afgeven.*

b. *Uit de richting, waarin zich bestanddeelen der bloedlichaampjes naar het serum en omgekeerd, bewegen. Door inwerking van zuur toch, geven de bloedlichaampjes voornamelijk eiwitstoffen aan het serum af, doch nemen chloriden en phosphaten er uit op.*

Door inwerking van alkali daarentegen geven de bloedlichaampjes voornamelijk chloriden en phosphaten aan het serum af, doch nemen eiwitstoffen er uit op.

5. *De invloed, welken CO_2, blijkens mijn vorig opstel* *), *op de permeabiliteit der bloedlichaampjes uitoefent, is niet specifiek voor dit zuur, maar wordt ook bij inwerking van andere zuren teruggevonden.*

6. *De invloed, door alkali op het bloed uitgeoefend, wordt volkomen opgeheven door toevoeging van een aequivalente hoeveelheid zuur en omgekeerd. De processen zijn dus omkeerbaar.*

7. *De gevoeligheid der bloedlichaampjes voor alkali en zuur is bijzonder groot. De verandering van permeabiliteit is nog merkbaar bij een verdunning van* 1 *KOH op* 12900 *bloed en van* 1 *HCl op* 40.000 *bloed, dus van resp.* 0.00775 *pCt. KOH en* 0.0025 *pCt. HCl.*

8. *Alkali beschermt de bloedlichaampjes tegen de werking van galzure zouten, gal en chloorammonium, in zoover deze stoffen het vermogen bezitten, kleurstof uit de lichaampjes te doen treden.*

---

*) *Verslagen en Mededeelingen*, enz. 3e R. Dl. IX. p. 197.

In het medegedeelde ligt een bevestiging en uitbreiding van hetgeen ik in mijn vorig opstel uiteenzette.

Zoutzuur en zwavelzuur wijzigen de permeabiliteit der bloedlichaampjes in denzelfden zin als het CO_2. Alkali doet het tegengestelde. Zoo is het ook met de wisseling tusschen de bestanddeelen van bloedlichaampjes en serum, welke van die verandering der permeabiliteit het gevolg is.

Intusschen zijn de bij dit onderzoek aan het licht gekomen feiten tot nog toe slechts bij het gedefibrineerde bloed geconstateerd, maar wanneer men bedenkt, dat bij het CO_2 de wijziging der permeabiliteit èn voor het gedefibrineerde èn voor het circuleerende bloed geldt, dan is het vermoeden gewettigd, dat de bovenbedoelde invloed van zuren en alkaliën zich niet bepalen tot het gedefibrineerde, maar eveneens gelden zal voor het circuleerende bloed.

Mocht dit vermoeden bewaarheid worden — en daarvoor bestaat, met het oog op de resultaten van de door mij tot dit doel reeds genomen experimenten, veel grond — dan zal de hier in het licht gestelde invloed van zuren en alkaliën bij de groote rol, welke zij in het organisme spelen (men denke aan de reactie der spijsverteringsvochten, urine, enz.), een niet te verwaarloozen factor in de leer der stofwisseling zijn.

Het is mij een aangename taak, hier mijn dank te betuigen aan den Heer F. Lamèris, assistent aan het physiologisch laboratorium der Rijks-Veeartsenijschool, voor de hulp, mij bij het verrichten der proeven verleend.

Physiol. Laborat. der Rijks-Veeartsenijschool,
Utrecht, Januari '92.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 2 April 1892.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, BEIJERINCK, PEKELHARING, HUBRECHT, GRINWIS, MULDER, STOKVIS, FORSTER, VAN DIESEN, VAN DORP, ZEEMAN, ZAAIJER, PLACE, KAPTEYN, BIERENS DE HAAN, MOLL, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, J. A. C. OUDEMANS, HOOGEWERFF, SCHOUTE, HOEK, RAUWENHOFF, SCHOLS, VAN DER WAALS, MICHAËLIS, FRANCHIMONT, SURINGAR, VAN BEMMELEN, MAC. GILLAVRY, HOFFMANN, BEHRENS, BAKHUIS ROOZEBOOM, WEBER, KAMERLINGH ONNES, KORTEWEG en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Wordt gelezen een Brief van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van:

L. DELISLE, Administrateur van de Bibliothèque nationale te Parijs, 24 Maart 1892; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 24 Maart 1892; 2°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 11 Maart 1892; 3°. het Ministerie van Waterstaat, Handel en Nijverheid te 's Gravenhage, 17 Maart 1892; 4°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teyler's

Stichting te Haarlem, 1892; 5°. J. B. WOLTERS te Groningen, 22 Februari 1892; 6°. FÖRSTEMANN, Archivaris van de kön. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 1892; 7°. N. VAN WERVEKE, Secretaris van het Institut Luxembourgeois, section historique, te Luxemburg, 1892; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behoort een brief van den Heer N. P. VAN DEN BERG, waarin der Afdeeling kennis gegeven wordt van het overlijden van zijn broeder, Dr. F. J. VAN DEN BERG, lid der Akademie, op 30 Maart l. l., te Hilversum.

De Voorzitter vindt hierin aanleiding om den overledene in waardeerende woorden te gedenken en zijn beeld als nauwkeurig, betrouwbaar en eenvoudig man, niet alleen op het gebied der wetenschap, maar ook in het dagelijksch leven, voor den geest der aanwezigen terug te roepen.

— De Commissie, in wier handen gesteld was een schrijven van den Minister van Binnenl. Zaken, ter begeleiding van eenige bescheiden, afkomstig van den Heer R. D. M. VERBEEK te Batavia, adviseert om den Minister voornoemd dank te zeggen voor de toezending daarvan en Z.Ex. mede te deelen, dat de Afdeeling die bescheiden heeft aangenomen voor bericht. Dit voorstel, 't welk wordt goedgekeurd, steunt op de overweging, dat een zeer uitvoerige brief van den Heer VERBEEK, geschreven vóór hij den Heer MARTIN ontmoet had, gevolgd was door een korteren, *na* dat oogenblik geschreven, en waaruit bleek, dat beide geleerden, in hoofdzaak, tot eenstemmigheid waren gekomen.

— De Heer KAPTEYN spreekt over systematische verschillen tusschen de visueele en photographische helderheid der sterren in verschillende deelen van den hemel.

De discussie van 370 photographieën, opgenomen aan de Kaapsche sterrewacht, op welke bijna 9000 vierkante graden van den zuidelijken hemel tusschen —19° en —78° declinatie zijn afgebeeld, voerde hem tot de volgende uitkomst:

Bij gelijkheid van visueele grootte is op de onderzochte platen het actinisch effect der sterren, ten minste van af de 4e tot aan de 10e grootte, in of nabij den Melkweg zeer aanzienlijk grooter dan in hoogere galactische breedte.

Voor de visueele grootten zijn genomen: voor de zwakkere sterren de waarden daarvoor aangegeven in de »Bonner Durchmusterung" en in de »Cordoba Zone-Catalogue"; voor de heldere, die der »Uranometria Argentina".

Spreker gaat de verschillende oorzaken na, aan welke dit verschijnsel kan worden toegeschreven. — Ofschoon het materiaal misschien niet geheel voldoend is om tot een definitief resultaat in dezen te geraken, zoo moet toch als zeer waarschijnlijk worden aangezien, dat, ook al bepaalt men zich uitsluitend tot sterren van den 1en spectraal-typus, het licht der sterren in of nabij den Melkweg rijker is aan violette stralen dan het licht der sterren in andere deelen van den hemel. Naar PICKERING's onderzoekingen zou daaruit volgen, dat hetzelfde geldt voor sterren van een anderen spectraal-typus.

Zekerheid in dezen moet betrekkelijk gemakkelijk te verkrijgen zijn door opzettelijk daartoe verrichte opnamen en photometrische bepalingen.

Spreker wijst op de partij, die men daarbij trekken kan van de photometrische opnamen van bepaalde reeksen van sterren van de 9de en 11de grootte, die thans ten behoeve van de internationale hemelkaart in Oxford worden gemaakt en deelt mede dat aan de Kaapsche sterrewacht reeds eene reeks directe bepalingen ondernomen is.

— De Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en J. A. C. OUDEMANS wijzen nog op den invloed die geoefend kan worden: hetzij door absorptie door nevels, hetzij door het verschil in rijkdom aan sterren op verschillende plaatsen van den melkweg.

— De Heer HUBRECHT geeft een kort overzicht van het doel, dat hij zich tijdens zijn afgeloopen reis in den Indischen Archipel gesteld had en betoogt de wenschelijkheid voor het

vergelijkend embryologisch onderzoek om in de eerste plaats vast te stellen, welke de bijzonderheden zijn van de ontwikkeling en de placentatie van Insectivora en Lemuriden.

Bij deze beide zoogdier-orden heerscht groote afwijking te dezer zake tusschen de verschillende geslachten onderling. Omtrent de placentatie der Lemuriden zijn eerst weinige gegevens beschikbaar, die van MILNE EDWARDS en van TURNER afkomstig zijn. Volgens beiden vindt men bij de Prosimiae of Lemuriden eene diffuse placenta, die uiterst gemakkelijk uit de moederlijke weefsels loslaat, zoodat de vraag is opgeworpen of de Lemuriden niet zelfs onder de Adeciduata zouden moeten worden gerangschikt. Bevreemdend was het vooral dat te dezer zake de tot heden onderzochte Lemuriden dergelijk verschil vertoonden, eenerzijds van de lager ontwikkelde Insectivora, andererzijds van de hooger gedifferentiëerde Primates, die beide door schijfvormige, deciduate placentatie gekenmerkt zijn, terwijl overigens de phylogenie aan de Lemuriden eene plaats tusschen deze beiden aanwijst. Het verheugt Spr. deze afwijking meer tot hare ware proporties te kunnen terugbrengen, sedert hij enkele weken geleden uit Banka een hoog zwangeren uterus van Tarsius, het zeldzame spookdiertje, ontvangen mocht door tusschenkomst van den officier van gezondheid A. EKERMAN.

Bij [illegible] Lemuride is de placenta schijfvormig.

In verhouding tot de grootste vlakke doorsnede dier placenta is de aanhechtingsvlakte, waar de samenhang met het moederlijk weefsel tot stand komt, vrij gering, eene bijzonderheid die aan verschijnselen bij zekere Insectivora herinnert. Tot heden was omtrent de placentatie van Tarsius niets bekend.

Spr. vertoont preparaten op spiritus om de placentatie van Tarsius, Nycticebus, Galeopithecus en Tupaja nog nader, in verband met het gesprokene, toe te lichten en wijst op het aanvankelijk dichte vlokkenkleed van de placenta van Nycticebus, dat in een later stadium van zwangerschap aan een der beide polen van de kiemblaas verdwenen was.

— De Heer PEKELHARING deelt, in aansluiting aan de in de Zitting van 30 Januari jl. door hem gehouden voor-

dracht, een en ander mede aangaande de stolling van het bloed.

Hij vond dat de van de gevormde bestanddeelen van het bloed afkomstige nucleoalbumine, die uit voor stolling gevrijwaard plasma door azijnzuur kan worden afgescheiden, in een NaCl-solutie van 0.6pCt. veel gemakkelijker oplost bij lichaam-temperatuur dan in de koude, en zich, bij afkoeling tot op 0° C., uit de oplossing afzet in eigenaardigen vorm, namelijk als tot groepen vereenigde bolletjes van verschillende grootte. In dezen vorm kan zij ook verkregen worden door plasma met 2 volumina water te verdunnen, met azijnzuur te behandelen, en te centrifugeeren totdat de neerslag zich grootendeels, maar niet geheel, afgezet heeft. Wordt dan de opaliseerende vloeistof afgeschonken en in de ijskast bewaard, dan zet zich op den bodem van het glas een bezinksel van bolletjes af, dat bij ongeveer 37° C. in indifferente keukenzoutoplossing oplost, en bij afkoeling in denzelfden vorm daaruit wordt neergeslagen. Deze neerslag vertoont al de eigenschappen van de vroeger beschreven nucleoalbumine. Zij wordt, in NaCl opgelost, bij ongeveer 65° C. neergeslagen, zij levert bij behandeling met maagsap nucleine, en zij vormt met kalk een verbinding, die zuivere oplossingen van fibrinogeen tot stolling brengt. Zij is geheel gelijk aan den neerslag die door afkoeling uit peptonplasma verkregen wordt, en waaraan WOOLDRIDGE den naam van A. fibrinogeen gegeven heeft. Spr. stemt geheel in met BIZZOZERO waar deze de meening van WOOLDRIDGE bestrijdt, als zou de uit peptonplasma zich vormende neerslag het voorkomen hebben van bloedplaatjes. De lichaampjes toch waaruit het zoogenaamde A. fibrinogeen bestaat, zijn niet plat, maar bolvormig of ellipsoidisch, en veel ongelijker in grootte dan ooit bij bloedplaatjes het geval is. Ook breken zij het licht sterker. Veeleer zouden zij met koloniën van saccharomyces-vormen te vergelijken zijn.

WOOLDRIDGE beschouwde deze stof als een soort van fibrinogeen, omdat peptonplasma, daarvan bevrijd, het vermogen verloren heeft te stollen door neutralisatie of door verdunning met water, en omdat zij, eenigen tijd in water of

keukenzout bewaard, een fibrinachtige stof vormt. Deze verschijnselen kunnen echter gemakkelijk op andere wijze verklaard worden. Peptonplasma stolt niet omdat de daarin aanwezige albumose, zoolang de reactie van de vloeistof alkalisch en het gehalte aan zout niet te klein is, de nucleoalbumine verhindert kalk op te nemen en die aan de fibrinogene stof over te dragen. Wanneer nu de nucleoalbumine — ten minste grootendeels — uit het plasma verwijderd is, is de vorming van fibrineferment in voldoende hoeveelheid om stolling te veroorzaken bij gebrek aan materiaal onmogelijk geworden. De verandering van het bezinksel, nadat het van het plasma gescheiden is, in een op fibrine gelijkende massa, wordt verklaard door verontreiniging met fibrinogeen, welke stof bij afkoeling van plasma tot op 0° C. ook, al is het voor een klein deel, licht wordt neergeslagen. Wordt nu het mengsel van nucleoalbumine en fibrinogeen in water of een slappe zoutoplossing gebracht, dan is er allicht kalk genoeg in de vloeistof voorhanden om, nu de albumose zoo goed als geheel verwijderd is, de vorming van fibrine mogelijk te maken.

Wanneer de nucleoalbumine uit zuur gemaakt oxalaatplasma — waaruit dus alle kalkzouten neergeslagen zijn — bereid is, kan zij door oplossen in NaCl 0.6 pCt. en weer neerslaan door afkoeling, volkomen van fibrinogeen bevrijd worden, evengoed als door herhaald oplossen in ammonia en neerslaan met azijnzuur. Intusschen is het noodig deze bewerking snel achtereen te doen plaats hebben. Wordt de nucleoalbumine langeren tijd bewaard, dan verliest zij het vermogen om met kalk fibrineferment te vormen, het spoedigst wanneer zij zich in een alkalische reageerende oplossing bevindt. Bij verwarming met slappe kaliloog levert zij albumose, terwijl de nucleïne geheel vernield wordt, zoodat in de oplossing phosphorzuur is aan te toonen.

Spr. heeft zich nu de vraag gesteld of zulk een splitsing van de mucleoalbumine, met vrij worden van albumose, niet wellicht ook plaats zou vinden wanneer de nucleoalbumine bij een levend dier in het bloed gebracht wordt. Inderdaad schijnt dit het geval te zijn. Wanneer versch

bereide nucleoalbumine uit plasma bij een konijn in de vena jugularis ingespoten wordt, dan kan daardoor, gelijk Spr. vroeger meedeelde, intravasculaire stolling veroorzaakt worden. Maar is de oplossing niet versch of te zeer verdund, dan stolt het bloed niet alleen niet in de vaten, maar ook veel langzamer en onvollediger dan gewoonlijk buiten het lichaam. Hierdoor te meer is de overeenkomst tusschen de uit het bloed bereide nucleoalbumine en de stof waaraan WOOLDRIDGE den naam van weefselfibrinogeen gegeven heeft — een overeenkomst door Spr. vroeger reeds aangeduid — zoo groot. WOOLDRIDGE toch kon bij de werking van deze stof, wat hij noemde »een positieve en een negatieve phase" aantoonen, d. w. z., weefselfibrinogeen, in de bloedvaten van een levend dier ingespoten, kan stolling van bloed in de vaten veroorzaken, maar ook het vermogen van het bloed om te stollen opheffen en verminderen.

»Weefselfibrinogeen" nu is een nucleoalbumine (Spr. bereidde deze stof uit de thymus van het kalf en uit testikels van kalf of ram) die, evenals de nucleoalbumine uit het bloed, door behandeling met verdunde kaliloog, albumose levert. Wordt deze stof, in 0.6 pCt. NaCl en een weinig Na_2CO_3 opgelost, in geconcentreerden toestand, bij een konijn in de vena jugularis ingespoten, dan sterft het dier weldra tengevolge van stolling van het bloed in het hart en de aderen. Wanneer men echter dezelfde stof, maar in verdunde oplossing, terstond daarna bij een ander konijn inspuit, dan is er niet alleen niets van intravasculaire stolling waar te nemen, maar kan zelfs het uit de carotis ontlaste bloed langen tijd — een uur of nog langer — vloeibaar blijven. Dit bloed stolt echter spoedig wanneer men het met CO_2 verzadigt, of met water verdunt. De bloedsdrukking in de slagaderen daalt enkele oogenblikken na het begin der inspuiting belangrijk. In een geval, waarbij de vloeistof niet krachtig genoeg was om uitgebreide intravasculaire stolling te veroorzaken, werd alleen een coagulum in de vena portae gevonden.

WOOLDRIDGE vond dat inspuiting van weefselfibrinogeen bij honden dikwijls alleen in de vena portae stolling te weeg

bracht, en WRIGHT toonde aan dat de oorzaak van dit verschijnsel gelegen is in den rijkdom van CO_2 van het bloed dat door de vena portae naar de lever gevoerd wordt. Naarmate, bij den hond, het bloed minder veneus is, naar die mate kan het ingespoten weefselfibrinogeen gemakkelijker onschadelijk gemaakt worden.

Wanneer derhalve de zoogenaamde negatieve phase van WOOLDRIDGE berustte op de splitsing van nucleoalbumine met vrij worden van albumose, dan zou dus bij den hond de inspuiting van „weefselfibrinogeen" de verschijnselen van pepton (albumose) vergiftiging ten gevolge moeten hebben, zoo er slechts voor gezorgd werd, dat het dier arm genoeg was aan CO_2 om de nucleoalbumine te vernielen voordat deze zich met kalk verbinden en dus tot fibrineferment worden kon. Inderdaad vond Spr. dat bij den hond, wanneer door krachtige kunstmatige ademhaling het CO_2 uit het bloed zooveel mogelijk verwijderd werd, inspuiting van een oplossing van weefselfibrinogeen, die bij een konijn uitgebreide intravasculaire stolling veroorzaakte, geen spoor van thromboce te weeg bracht, maar wel alle verschijnselen van pepton-vergiftiging. Het dier werd eerst onrustig, daarna kalm, in het eene geval meer, in het andere minder bedwelmd; de bloedsdrukking daalde sterk, en het bloed uit de carotis ontlast, bleef, aan zich zelf overgelaten, vloeibaar, maar stolde na verdunning met water of na verzadiging met CO_2. In het bloed kon, naar de door DEVOTO aangegeven methode, albumose aangetoond worden.

Spr. meent dus te mogen aannnemen dat het dierlijk lichaam — bij den hond in sterkere mate dan bij het konijn — in staat is de van cellen afkomstige nucleoalbumine, wanneer die in het bloed gebracht is, te vernielen en daaruit albumose vrij te maken, en hij heeft voor deze meening krachtigen steun gevonden in een juist dezer dagen in de Proceedings of the Royal Irish Academy gepubliceerde mededeeling van Dr. A. E. WRIGHT, die langs eenigszins anderen weg tot geheel hetzelfde resultaat gekomen is.

Ten slotte wijst Spr. er op dat de nucleoalbumine uit thymus of testikel evengoed als de nucleoalbumine uit het

bloed in staat is met kalk fibrineferment te vormen — dat ook met betrekking tot de nucleoalbumine uit het bloed de »positieve en negatieve phase" van WOOLDRIDGE is waar te nemen — dat de strijd tusschen WOOLDRIDGE en de school van A. SCHMIDT over de werking van leucocyten en van het uit lymphklieren door uitpersing te verkrijgen vocht op de stolling van het bloed, ten slotte neerkomt op de werking van meer en van minder geconcentreerde oplossingen van nucleoalbumine — dat eindelijk ook caseïne bij verwarming met kaliloog albumose levert en bij konijnen in het bloed ingespoten de stolling vertraagt — en formuleert dan zijn opvatting omtrent de stolling van het bloed op de volgende wijze:

In het normale bloed komt in oplossing voor een globuline, fibrinogeen, waarvan de samenstelling en de eigenschappen door de onderzoekingen van HAMMARSTEN bekend zijn geworden.

Wanneer de gevormde bestanddeelen van het bloed buiten den invloed komen van de levende weefsels of door andere oorzaken afsterven, staan zij aan het bloedplasma een nucleo-albumine af, die uit het bloedplasma kalk kan opnemen, en dan uit het fibrinogeen fibrine kan doen onstaan.

Het levende lichaam bezit echter, waarschijnlijk in de endothelium cellen van den vaatwand, binnen zekere grenzen, het vermogen deze nucleoalbumine te vernielen, onder afsplijting van albumose, en daardoor de vorming van fibrine te voorkomen.

Nucleoalbuminen die in staat zijn kalk op te nemen en tot vorming van fibrine aan fibrinogeen af te staan, hoezeer zij overigens nog van elkander mogen verschillen, kunnen door cellen uit onderscheidene organen geleverd worden.

— De Heer VAN BEMMELLEN biedt, uit naam van de Geologische Commissie, een verslag aan omtrent eene grondboring te Oosterlittens (Friesland, gemeente Baarderadeel), geleverd door Dr. H. VAN CAPPELLE.

— Voor de boekerij worden aangeboden: door den Heer BIERENS DE HAAN een nieuw stuk van het »Nieuw Archief der Wiskunde", en door den Heer SCHOLS een nieuw stuk der »Waterbouwkunde" door HENKET, SCHOLS en TELDERS.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

MEDEDEELINGEN OMTRENT DE GEOLOGIE VAN NEDERLAND, VERZAMELD DOOR DE COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK.

N. 6.

VERSLAG

OMTRENT

EENE GRONDBORING TE OOSTERLITTENS (FRIESLAND, GEMEENTE BAARDERADEEL).

DOOR

Dr. H. VAN CAPPELLE.



Onlangs werd mij medegedeeld, dat op het terrein der Roomboterfabriek te Oosterlittens tot het opsporen van goed koelwater eene boring zou plaats hebben. Toen ik bij den bestuurder van genoemde fabriek inlichtingen hieromtrent vroeg, vernam ik, dat met het werk reeds een aanvang gemaakt was. In de hoop, de kennis van Friesland's bodem met eenige nieuwe feiten te kunnen vermeerderen, begaf ik mij onmiddellijk op reis en bevond bij aankomst, dat men reeds 43 M. in den bodem was doorgedrongen.

Door de nauwkeurige inlichtingen, welke de boorder mij heeft verstrekt, ben ik echter niet geheel onwetend gebleven omtrent de vormingen, die tot op deze diepte ontwikkeld zijn en kan ik van genoemde plaats eene doorsnede des bodems aanbieden. Hoewel dus het grootste deel der boorlijst op groote nauwkeurigheid geene aanspraak mag maken, toch kan zij ons door eene vergelijking met de vroeger door mij beschreven doorsneden uit verschillende deelen van Friesland, eenige physisch-geographische toestanden leeren kennen, die in den oud- en jongdiluvialen tijd in deze provincie

geheerscht hebben. Voorloopig zij het volgende opgemerkt.

Ook te Oosterlittens werd tot op eene diepte van 48 M. slechts één keileem aangetroffen, dat dus als eene vorming van de oudste landijsbedekking mag beschouwd worden, en waaronder, gelijk te Sneek, eene strandformatie volgt, die tijdens eene daling des bodems ontstaan moet zijn. Uit het feit, dat van alle punten, wier bodem tot op eene groote diepte nauwkeurig onderzocht kon worden, de plaatsen, waar het glaciaal gelaagd diluvium eene maritieme ontwikkeling vertoont, op het gebied der voormalige Middelzee gelegen zijn, mag worden afgeleid dat, tijdens de vorming van deze afdeeling van het diluvium, in Friesland reeds eene Middelzee aanwezig was.

Ook aan het einde van dit tijdvak moet in het midden dezer provincie een zeeboezem bestaan hebben, getuige de zeeschelpen, welke te Oosterlittens en bij eene boring, lang geleden nabij Leeuwarden verricht, in het zanddiluvium begraven werden gevonden. De omtrekken van dezen zeeboezem zullen echter in die oude tijden wel nooit volkomen met die der Alluviale Middelzee hebben samengehangen *).

Ik stel mij voor, de verschillen en overeenkomsten, die de Friesche boorprofielen vertoonen, elders uitvoeriger te behandelen.

BESCHRIJVING DER DOORSNEDE.

a.	0—10 M.	Blauwe zeeklei.	*Alluvium*
b.	10—26 M.	Fijn zeezand, op eene diepte van 13 of 16 M. door een schelplaag afgewisseld.	*Postglaciaal-diluvium* (marit. facies)

*) Te Sneek (gebied der voormalige Middelzee) bijv. rust op de grondmoraine een in zoetwater afgezet zanddiluvium. Dat echter de zee tijdens de afzetting van dit zand in de nabijheid was, toonde LORIÉ aan door de ontdekking van een *Cardium edule* L. in het zanddiluvium onder het stationsterrein.

c. 26—30 M. Uiterst harde, zandige blauwe klei, met talrijke steenen gemengd. Aan een der granietkeitjes, die men uit deze laag bewaard had, kleefde nog een weinig klei, waardoor het vermoeden bevestigd werd, dat op deze diepten het keileem of de grondmoraine van het diluviale landijs ontwikkeld is.

Glaciaal ongelaagd diluvium. (Grondmoraine van het oudste landijs.)

d. 30—43 M. Zand, bovenaan met veel klei gemengd en afgewisseld door een zachte kleilaag.

e. 43—45 M. Grijs, met veel klei gemengd, sterk kalkhoudend zand, bijna uitsluitend uit doorschijnende en halfdoorschijnende gerolde kwartskorrels samengesteld en met eenige sterk verweerde granietbrokjes, eenige vuursteenschilfers, talrijke vrij groote zilverwitte micaplaatjes en veenpoeder gemengd. In dit zand (voornamelijk in de bovenste deelen) vond ik: verscheidene, tot 1 cM. groote schelpstukjes, waaronder *Cardium edule* L. *Scrobicularia piperita* L. en *Pholas* (?) vertegenwoordigd zijn; enkele stekeltjes van *Echinocardium cordatum* Penn.; eenige overblijfselen van zeewieren en eene groote hoeveelheid stukjes hout, dat de eigenaardige uitgevreten oppervlakte vertoont, die aan het hout eigen is, hetwelk de zee op onze stranden werpt.

Glaciaal gelaagd skandinaafsch diluvium. (Maritieme facies).

f. 45—47 M.*) Hetzelfde zand, doch zonder kalk en naar beneden fijner wordend. De micaplaatjes worden onderaan zeldzamer en kleiner, terwijl de houtstukjes ontbreken en enkele bruinkoolbrokjes met het zand gemengd zijn. } *Glac. gel. skand. dil.* (Fluviatiele facies) naar beneden in *Glac. gel. gemengd dil.* overgaande.

*) Het aanboren van sterke waterader met een aanzienlijk zoutgehalte (n.l. $3\ ^0/_0$) was oorzaak, dat men besloot, het werk voorloopig te staken.

DERDE BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS DER MELOCACTI VAN WEST-INDIË.

DOOR

W. F. R. SURINGAR.

(Medegedeeld in de Vergadering der Kon. Akad. van Wetenschappen van 27 Juni 1891).

Met eene Kaart.

Sedert mijne mededeeling, opgenomen in de Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, 3de Reeks, Deel VI, blz. 408 en volgende, heb ik geen nieuw materiaal uit onze West-Indische bezittingen ontvangen. De talrijke vruchten, die door een aantal van de toen beschreven vormen werden voortgebracht, gaven mij echter gelegenheid, om ten vorige jare, bij den gebruikelijken ruil van zaden tusschen de Europeesche kruidtuinen, de zaden dezer Melocacti aan de zuster-inrichtingen aan te bieden. Van deze aanbieding maakten 35 kruidtuinen gebruik. Tegelijkertijd verzocht ik, mij voorwerpen van dit geslacht, welke voorhanden mochten wezen, ter determinatie en beschrijving te willen leenen. Nauwelijks kon ik hiervan eenig resultaat verwachten, daar Melocacti, mochten zij al af en toe nog worden aangevoerd, zoo spoedig afsterven; en de uitkomst was dan ook hiermede in overeenstemming, nl. negatief wat levend materiaal betreft.

Evenwel zond de Hoogleeraar K. Goebel mij uit Marburg

spiritusmateriaal van een Melocactus, door Dr. GLAZIOU bij Rio Janeiro in Brazilië verzameld; dezelfde, waaromtrent hij opmerkingen betreffende de ontwikkelingsgeschiedenis in zijne: »Pflanzenbiologische Schilderungen" heeft medegedeeld, en welke hij als waarschijnlijk tot *M. violaceus* PFEIFF. behoorende vermeldt. Ook uit Berlijn, waar de Heer GLAZIOU een vijfentwintigtal levende voorwerpen aan den Hortus had geschonken, welke voorwerpen echter alle betrekkelijk spoedig gestorven waren, ontving ik deze zelfde soort, en daarbij een tweetal andere voorwerpen, uit Portorico afkomstig, ter leen. Het eene van deze was in spiritus bewaard geweest, het andere bestond uit gedroogde fragmenten, met eene teekening, die, hoewel blijkbaar niet geheel nauwkeurig, toch tot de reconstructie van het voorwerp in zijn geheel behulpzaam kon zijn.

De voorwerpen van Rio Janeiro, door GLAZIOU verzameld, waren ook door Dr. SCHUMANN tot *M. violaceus* PFEIFF. gebracht, en zijn door hem als zoodanig in de laatstelijk verschenen aflevering van de *Flora Brasiliensis*, waarvoor deze geleerde de Cacteeën bewerkte, beschreven en afgebeeld (*Fl. Bras.* Afl. 108, p. 234, pl. 48. Sept. 1890).

Het blijkt uit de afbeelding en beschrijving, dat deze soort groote bloemen bezit, hetgeen dus overeenstemt met wat ik vroeger omtrent de verhouding van deze organen tot de ontwikkeling van de vegetatieve deelen, en ook in verband met de geografische verspreiding opmerkte. Het is een kleine Melocactus met enkel randdorens in de meeste groepen, terwijl slechts zeer zelden een middendoren, en dan iets kleiner dan de grootste randdoren, te voorschijn komt. De soort behoort dus in elk geval tot de *acentri*, met aansluiting aan de *microcentri*. Hare identiteit met *M. violaceus* van PFEIFFER meen ik te moeten betwijfelen, daar zij kleine dorens heeft en de *M. violaceus* PFEIFFER als met lange dorens voorzien wordt beschreven. Overigens is de beschrijving van PFEIFFER onvolkomen, zoodat deze zijne soort tot de eenigszins twijfelachtige moet worden gerekend. Wellicht zullen latere voorwerpen, welke uit Brazilië mochten worden aangevoerd, hieromtrent nader licht geven. Tot zoo lang zal het een-

voudigst zijn, den naam voor de thans door SCHUMANN uitvoerig beschreven en afgebeelde soort te behouden; zij moet dan, in de door mij gegeven affiniteistabel als *M. violaceus* PFEIFF. sec. SCHUMANN, tusschen *M. pentacentrus* LEM. en *M. depressus* HOOK. worden ingelascht.

De voorwerpen van Portorico waren belangrijk, omdat van dat eiland nog geen Melocactus bekend was en dus in dat opzicht eene leemte wordt aangevuld.

Het eene, van Coamo, op rotsen in het rivierdal, is zeer klein en onvruchtbaar, vermoedelijk een jong exemplaar; de determinatie kan dus niet zeker en de beschrijving niet volledig worden gegeven. Het komt mij echter voor een kleine vorm van *M. communis* DC. te vertegenwoordigen. De dorengroepen bevatten maar één middendoren, en de dorenvelden zijn kleiner dan in de forsche exemplaren van deze soort, welke ik op St. Eustatius verzamelde; maar overigens komt het karakter der dorens en dorengroepen daarmede het naast overeen.

Het andere, gedroogde voorwerp met teekening is een nieuwe soort, onder de *microcentri* in te lasschen bij *M. rubens* PFEIFF en *M. crassispinus* SALM DIJCK. Ziehier de beschrijving:

M. portoricensis.

Caulis viridis parvus depresso-globosus, usque ad cephalium 9 cm. altus, 12 cm. crassus.

Costae 10, lateribus planiusculis, dorso acuto inter areolas crenato.

Areolae 5—6 satis approximatae ($1^1/_4$—2 cm. dist.) superficiales magnae, superiores oblongae valde tomentosae, inferiores orbiculares minores nudae.

Spinae graciles aciculares curvatae, e bulbo crasso plumbeo paullum fimbriato basi leviter obtusangulae dein teretes versus apicem sensim attenuatae, colore flavido- plerumque rubro-fuscescentes,

marginales 7—9 patentissime extrorsum curvatae, laterales paullulum parallelae, supra costam vicinam extensae,

inferiori ($2^1/_2$ cm. longa basi $1^1/_4$ mm. crassa) subaequales, summis maiores;

centralis 1, inferiori marginali subaequales ($3-3^1/_2$ cm. longa) recta vel sursum incurvata.

Cephalium teres setis rufofuscis longioribus curvatis dense obsitum.

Flores mediocres, petalis coccineis limbo obovato-acuminato, stigmatibus 6 erectis in fauce perspicuis.

Bacca mediocris crassiuscula obovato-clavata coccinea.

Guanica (ins. Portorico), in arenosis maritimis legit SINTENIS, d. 23 m. Jan. 1886. *Hb. Berol.*

Voorts moge hier worden aangeteekend, dat de Heer J. VAN BREDA DE HAAN van het aanwezige materiaal gebruik maakte tot eene revisie van de anatomie van het geslacht Melocactus, en de uitkomsten daarvan nederlegde in het Akademische proefschrift, waarop hij te Leiden in de botanie promoveerde, en waarvan ik reeds de eer had, namens hem een exemplaar voor de boekerij der Akademie aan te bieden.

Eindelijk nog het volgende:

Het schijnt misschien eenigszins voorbarig, reeds nu de geografische verspreiding van de soorten van dit geslacht te behandelen, daar stellig nog niet alle bekend zijn, en het terugbrengen van alle vormen tot soorten, met inachtneming der verscheidenheden en individueele variaties nog niet mogelijk is. Echter is het niet van belang ontbloot, ook als punt van uitgang tot nadere onderzoekingen, zich een beeld voor oogen te stellen van die verspreiding, voor zoover onze tegenwoordige kennis daartoe aanleiding geeft. Ik heb daarom, in het hierbij gevoegde schetskaartje, de hoofdfeiten van die verspreiding aangeteekend, nl. bij elk gedeelte van het vaste land en bij elk eiland, waarvan Melocacti beschreven zijn, het getal soorten, naar de tot dusver gevolgde opvatting aangeteekend, met onderscheiding van dezelfde hoofdgroepen (*acentri* enz.) die ook in de vroeger (zie de in den aanhef aangehaalde Bijdrage) door mij gegeven affiniteitstabel werden aangenomen.

Vóór de letter *a* tot *d*, d^1, (zie de verklaring op de kaart) die deze groepen aanduiden, staats dan telkens het cijfer, aanwijzende het getal der tot die groep behoorende soorten, welke in de landstreek of op het eiland, waarbij de cijfers geplaatst zijn, zijn verzameld. Waar dit cijfer eene breuk is, wil zulks zeggen, dat evenveel soorten als de teller aanwijst, van evenveel landstreken of eilanden zijn verzameld als de noemer groot is; één dier lokaliteiten is dan natuurlijk de streek of het eiland zelf, waarbij zich het cijfer bevindt. Zoo beteekent b. v. $2\frac{1}{2}\frac{1}{3}d, \frac{1}{2}d'$ bij het eiland Bonaire, dat vandaar twee soorten, behoorende tot de groep *d*: *pleiocentri*, afdeelingen *radiantes* en *flexi*, verzameld zijn, welke nog nergens anders zijn waargenomen, ééne van denzelfden aard, die ook nog op een ander eiland, en ééne dergelijke, die bovendien op twee andere eilanden is waargenomen; voorts ééne behoorende tot de *pleiocentri intertexti*, die ook nog op een ander eiland voorkomt.

Welke soorten dit zijn en op welke deelen van het gebied dezelfde soorten voorkomen, is hier niet aangeduid, om de voorstelling niet ingewikkeld te maken, maar kan gemakkelijk in de bovenvermelde affiniteitstabel worden nagezien.

In 't algemeen ziet men uit het kaartje, dat het gebied der Melocacti ten noorden en ten zuiden ongeveer begrensd wordt door de keerkringen; het valt er nog een weinig buiten, meer aan de noord- dan aan de zuidzijde. Voorts beslaat het omstreeks 70 lengtegraden. Binnen die ruimte vormt het in diagonale richting, van noord-west naar zuidoost, een vrij smalle langwerpige figuur, vier à vijfmalen langer dan breed, waarvan de uiteinden door het oostelijk deel van Mexico eenerzijds, en van Brazilië anderzijds, worden gevormd, terwijl het middeldeel door Venezuela met Columbia en den West-Indischen Archipel wordt ingenomen. Een groote afstand scheidt dit middeldeel van de genoemde uiterste deelen, vooral van het zuidoostelijke langs de oostkust van Brazilië: hetzij omdat de kuststreken daartusschen geen geschikte lokaliteiten voor Melocacti aanbieden of om

andere redenen. Het middeldeel ligt op zoodanige noorder breedte, dat eene middellijn, door het geheele gebied in de lengte getrokken, een eenigszins ongelijken boog vormt, die ongeveer over onze benedenwindsche eilanden Aruba, Curaçao en Bonaire verloopt. Daar treffen een maximum van warmte en ruime zeelucht samen, en heeft men tegelijk het grootste getal soorten, en de hoogst ontwikkelde vormen.

Van dit midden uit is nu nog eene tweede lijn getrokken, die noordelijk door St. Thomas, zuidelijk door Venezuela gaat, en aldus de dwarse, kortste middellijn door het gebied vormt.

Letten wij nu op de verspreiding der soorten, dan valt terstond in het oog, dat de *pleiocentri* (d, d^1) bij uitnemendheid in het midden te huis behooren, en, van de eenvoudiger vormen, de *monocentrische* (c) in Venezuela en Columbia, de *microcentrische* in de eilandenreeks aan de tegenoverliggende grens, en de *acentrische* (a) in Brazilië. De Mexicaansche soorten vertoonen geen heerschend karakter. Evenals in Brazilië, ontmoeten elkander de beide vormen (b en c) van het noordoostelijk en zuidwestelijk grensgebied; en daarbij voegt zich een (d) uit het midden. Van deze laatste (de *pleiocentri*) is ook een enkele noordelijk en zuidelijk van het midden (op St. Domingo en in Venezuela) aangetroffen, en zelfs een drietal op St. Thomas, dat bovendien een tweetal soorten heeft, die zich bij de Venezuelaansche aansluiten. De dwarse middellijn op het kaartje wijst dus, bij een sterk verschil tusschen het midden en de grenzen naar beide zijden, tevens op vrij belangrijke verbindingen, die vermoedelijk wel met vroegere toestanden van dit deel der aardoppervlakte samenhangen.

Meer in bijzonderheden in te gaan op theoretische beschouwingen, zou ik gevaarlijk achten, omdat de kennis der feiten nog onvolledig is. Maar, voor zoover bekend, wijzen zij toch reeds op eene aansluiting tusschen de verwantschapsvertakkingen en de geografische verspreiding, die mij belangrijk genoeg voorkwam, om er de aandacht op te vestigen, en ze, eensdeels door de vroeger gegeven affiniteitstabel, anderendeels door het nu aangeboden schets-

kaartje op zoodanige wijze voor te stellen, dat de hoofdfeiten duidelijk in het oog vallen en derhalve, ook bij verdere onderzoekingen, gemakkelijk geraadpleegd en in rekening gebracht kunnen worden. Bijna overbodig is het, er op te wijzen, dat de soorten, die in de affiniteitstabel aan den voet van stam en takken zijn geplaatst, aan de grenzen van het geografische gebied behooren, en die, welke aan de hoogste takken zijn geplaatst, grootendeels aan het centrum van dit gebied eigen zijn. Vrij natuurlijk zal ieder het vinden, dat in dit centrum, waar de gunstigste omstandigheden samenkomen, ook de meeste en schoonste vormen zich hebben ontwikkeld. Maar waarom, van de eenvoudiger vormen, de eene type zich aan de eene grens, de andere zich op de andere bevindt, is eene vraag, die moeilijker te beantwoorden valt. Zoo ook deze, waarom die eenvoudiger vormen, wat de dorengroepen betreft, over 't algemeen grooter bloemen bezitten. Een eerste stap is echter, de feiten te leeren kennen, en, bij nadere onderzoekingen, er op te letten, of zij, naarmate onze kennis der vormen en van hare verspreiding vollediger wordt, ook in dezelfde mate worden bevestigd en versterkt.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Vrijdag 29 April 1892.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, HOFFMANN, BAKHUIS ROOZEBOOM, VAN BEMMELEN, BEHRENS, ZEEMAN, KAMERLINGH ONNES, MOLL, FRANCHIMONT, VAN DORP, GUNNING, ENGELMANN, PEKELHARING, STOKVIS, FORSTER, VAN DER WAALS, PLACE, KAPTEYN, KORTEWEG, BIERENS DE HAAN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, SCHOUTE, BAEHR, A. C. OUDEMANS JR., MAC. GILLAVRY, VAN DIESEN, HUBRECHT, en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1⁰. J. A. WIJNNE, Bibliothecaris van het historisch Genootschap te Utrecht, 1891; 2⁰. M. BERTHELOT te Parijs, 1891; 3⁰. A. RÉVILLE te Parijs, 5 November 1891; 4⁰. den Directeur van de Ecole polytechnique te Parijs, 6 November 1891; 5⁰. D'HERMANSART, Secretaris van de Société des Antiquaires de la Morinie te St. Omer, 7 November 1891; 6⁰. H. DROUEZ, Secretaris van de Académie des Sciences, Arts et belles-Lettres te Dyon, 1891; 7⁰. A. VIOIE, Secretaris van de Académie des Sciences, belles-Lettres et Arts te Bordeaux, 1891; 8⁰. den Bibliothecaris van de Societas

pro fauna et flora fennica te Helsingfors, 1891; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 13 April 1892; 2°. het Ministerie van Koloniën te 's Gravenhage, 13 April 1892; 3°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 19 April 1892; 4°. J. J. DE BUSSY, Secretaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, April 1892; 5°. A. G. VORDERMAN te Batavia, 11 Maart 1892; 6°. L. DE MILLOUÉ, Directeur van het Muséum Guimet te Parijs, 12 Juni, 7 Augustus, 12 October 1891; 7°. A. F. MARION, Directeur van het Muséum d'Histoire naturelle te Marseille, 26 Februari 1892; 8°. A. DUMÉRIL, Secretaris van de Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres te Toulouse, 10 Maart 1891; 9°. den Secretaris van de Académie des Sciences et Lettres te Montpellier, 1891; 10°. P. L. SCLATER, Secretaris van de zoological Society te Londen, April 1892; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren 1°. brieven van de Heeren J. A. C. OUDEMANS, SCHOLS en MICHAËLIS, waarin zij zich verontschuldigen over het niet bijwonen van de vergadering; 2°. eene missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken, waarin der Afdeeling wordt medegedeeld dat H. M. de Koningin-Regentes de herbenoemingen van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN en VAN DER WAALS, respectievelijk tot Voorzitter en Onder-Voorzitter der Afdeeling, heeft goedgekeurd; 3°. eene circulaire van de Kiesvereeniging Burgerplicht te Amsterdam, waarin de belangstelling der Akademie wordt ingeroepen voor »het vraagstuk van de droogmaking der Zuiderzee". De Voorzitter meent dat deze circulaire voor kennisgeving behoort te worden aangenomen, omdat de Akademie zich aan de onderwerpelijke zaak, hoe belangrijk ook uit verschillende oog-

punten, niet kan laten gelegen leggen, 1°. omdat in de circulaire gesproken wordt van »een verzoek om behartig der Droogmaking aan commercieele, euconomische en staatkundige Vereenigingen", en de Akademie tot geene dier categorieën gerekend kan worden, en 2°. omdat art. 2 van het Organiek Reglement der Akademie enkel toestaat, dat de Akademie zich doe gelden als raadgeefster der Regeering op het gebied der Wetenschap, en het onderwerp der circulaire niet tot dat gebied behoort. — Het voorstel van den Voorzitter wordt aangenomen.

— De Heer Behrens spreekt over de mikroskopische structuur van eenige alliages.

Kristallisatie van metalen is een algemeen verschijnsel. Tot den amorphen toestand naderen het meest enkele zuivere metalen, Al, Cu, Ni. De voornaamste conditie is lage temperatuur bij het smelten en gieten; plotselinge bekoeling maakt de kristallen alleen kleiner. Zuiver Ag vertoont steeds duidelijke etsfiguren, hetgeen anders geaarde materie tusschen de kristallen doet vermoeden.

Alliages kristalliseeren doorgaans gemakkelijker en duidelijker dan de zuivere metalen. Hierbij heeft splitsing aan verschillende alliages plaats. In alliages van Ag en Au kan dit verschijnsel in bolletjes van minder dan 1 gr. waargenomen, en in zilverhoudend koper kan 0.2 pCt. Ag langs dezen weg aangetoond worden. Men zoude hierop eene approximatieve bepaling van het zilvergehalte kunnen baseeren.

Alle structuurtypen der kristallijne gesteenten worden in alliages teruggevonden. Voorheerschend rechthoekig maaswerk (alliages met veel kristallen van hoog smeltpunt), minder verspreid worden geïsoleerde kristalgewrochten aangetroffen (alliages met weinige kristallen van hoog smeltpunt, als bv. Zn + 10 pCt.. Pt, Cu + 10 pCt. Co).

Mechanische bewerking vernietigt de kristallisatie niet, ook niet smeden of pletten in gloeihitte. Kristallijne metalen en alliages gedragen zich onder mechanische bewerking als inhomogene lichamen, hetgeen wederom op interkristallijne materie wijst.

Door aanhoudend gloeien wordt brons en muntzilver niet veranderd, evenmin zuiver Ag en zuiver Ni, terwijl in alliages van Cu met Ni en in koolstofhoudend ijzer de kristallen aangroeien, waarmede bros worden van het metaal gepaard gaat.

Een paar vragen, door den Secretaris en den Heer VAN DIESEN tot den Schrijver gericht, worden door hem beantwoord.

— De Heer SCHOUTE handelt over de algemeenste verplaatsing in de ruimte R^n met n afmetingen. Hij heft daartoe de schijnbare tegenspraak op tusschen enkele stellingen, door den Heer A. E. RAHUSEN bij het onderzoek naar congruentie en symmetrie in R^n verkregen (*Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft*, Deel IV, blz. 104) en de uitkomst, dat twee projectieve figuren in R^n een aantal van $n + 1$ coïncidentiepunten hebben. Voor de bijzondere gevallen van twee congruente en twee symmetrische figuren wijst hij de ligging dezer coïncidentiepunten aan, wat dan tevens leidt tot de volgende nieuwe stellingen:

»De algemeenste verplaatsing in R^n wordt verkregen: voor even n door $\frac{n}{2}$ rotaties in onderling volstrekt loodrechte vlakken en voor oneven n door $\frac{n-1}{2}$ dergelijke rotaties en een translatie in de richting loodrecht op alle vlakken van rotatie. Hierbij is de volgorde der samenstellende bewegingen van geen invloed op de einduitkomst".

»Bij twee symmetrische figuren X en Y in R^n is er steeds een ruimte R^{n-1} te vinden, die de figuren X en Y volgens congruente overeenkomstige figuren snijdt. De overeenkomstige punten x en y van X en Y, die buiten deze R^{n-1} liggen, bevinden zich aan weerskanten op gelijke afstanden van deze R^{n-1}".

»De figuur X in R^n kan in den symmetrischen stand Y in R^n worden omgezet met behulp van een beweging door een ruimte R^{n+1}, van welke R^n deel uitmaakt. Deze

beweging in R^{n+1} is geen algemeenste beweging; want een der rotaties bedraagt 180°".

— De Heer Bakhuis Roozeboom spreekt over de hydraten van ijzerchloried en hunne oplosbaarheid.

Tot dusverre waren van dit zout twee hydraten bekend: het in den handel voorkomende gele hydraat ($Fe_2Cl_6.12\,H_2O$) en een bruinrood, waarvan het watergehalte door sommigen op 5, door anderen op 6 mol. werd aangegeven.

Het onderzoek leerde dat het eerstgenoemde eene oplosbaarheid heeft, die met verhoogde temperatuur toeneemt, totdat bij 36°.5 de verzadigde oplossing dezelfde samenstelling verkrijgt als de kristallen, en dus hun smeltpunt bereikt is.

Behalve deze oplossingen, die meer water bevatten dan het vaste hydraat, zijn echter ook oplossingen bestaanbaar met minder water, welke nochtans met het vaste hydraat in evenwicht kunnen zijn en die gezamenlijk door een tweeden tak der oplosbaarheidslijn worden voorgesteld, welke met den eerstgenoemde in het smeltpunt samenkomt, en te zamen eene doorloopende kromme lijn vormen.

Zoodanig voorbeeld van twee takken der oplosbaarheidslijn was door spreker vroeger reeds bij een ander zouthydraat ($CaCl_2.6H_2O$) aangetroffen, doch de tweede tak strekte zich daarbij slechts over 1° uit. In het geval van $Fe_2Cl_6.12H_2O$ kon die tweede tak van 8°—36°.5 worden bepaald.

Hiermede is de volkomene analogie tusschen de oplosbaarheid van zouthydraten en die van gashydraten aangetoond, voor welke laatste verbindingen spreker het eerst de mogelijkheid van het bestaan van tweeërlei verzadigde oplossing, bij temperaturen beneden het smeltpunt, had bewezen. De oplossingen, welke door dien tweeden tak worden voorgesteld, zijn echter slechts stabiel van 36°.5 tot 27°. Bij die temperatuur treedt een ander, tot dusver onbekend hydraat op, welks samenstelling op $Fe_2Cl_6.7H_2O$ werd bepaald.

Zijn smeltpunt ligt bij 32°.5; van 27°—32°.5 bestaat het naast oplossingen, die meer dan 7 mol. water bevatten; van 32°.5 tot 30° zijn weder verzadigde opl. mogelijk, die minder dan $7\,H_2O$ bevatten.

Bij 30° treedt een ander hydraat op, het tweede van ouds bekende, dat bleek 5 H_2O te bevatten en bij 56° smelt. Van dit hydraat beslaat de tweede tak der oplosbaarheidslijn slechts eene kleine uitgestrektheid, terugloopende van 56°—54°.

Daarna treedt bij toenemend gehalte der oplossing aan Fe_2Cl_6 nogmaals een nieuw hydraat op, $Fe_2Cl_6 . 4 H_2O$ welks smeltpunt bij 74° ligt.

Hiervan bestaat weder een tweede tak over de temperaturen 74°—65°. Bij 65° treedt eindelijk het watervrije ijzerchloried nevens de oplossing op.

Al de punten, waarin de 2e tak der oplosbaarheidslijn van een hooger en de 1e tak der lijn voor het opvolgende lagere hydraat elkander snijden, zijn punten, welke de samenstelling der oplossingen aangeven, welke bij die temperaturen stollen tot een mengsel der twee hydraten.

Zoodanig punt is ook het kryohydratische, waar $Fe_2Cl_6 . 12 H_2O$ en ijs optreden.

In één dier punten komt men steeds bij voortgaande afkoeling van eene willekeurige oplossing.

Hiermede is het geheele gedrag van ijzerchloried en water, bij drukkingen van 1 Atm., aangegeven; bij andere drukkingen zullen de bijeenbehoorende concentraties der oplossingen en temperaturen gewijzigd worden.

— De Heer KAPTEYN spreekt over de verdeeling van de sterren in de ruimte. Bij het onderzoek dezer verdeeling is hij uitgegaan van het denkbeeld, dat op het tegenwoordig standpunt der wetenschap de afstanden der vaste sterren in het algemeen het best kunnen worden beoordeeld naar hunne eigen beweging. Onderzoekingen van SAFFORD, PLUMMER STUMPE e. a. hebben dit duidelijk in het licht gesteld.

Spreker heeft eene vergelijking gemaakt van den spectraaltypus der sterren met eigenbeweging van verschillend bedrag. Voor den spectraaltypus is gebruik gemaakt van PICKERING's »DRAPER Catalogue", voor de eigenbewegingen van de lijst van den Heer STUMPE, voorkomende *Astr. Nachr.* N°. 2999—3000. Van de 1054 sterren van deze lijst werden

476 objecten helderder dan 7mg.0 in den »DRAPER Catalogue" gevonden. De overigen zijn of zwakker of te zuidelijk. Behalve deze sterren werden nog 115 andere sterren met onmerkbare E.B. (in de twee coord. resp. <0s003 en <0"03) in AUWER's BRADLEY opgezócht.

Noemt men Q het quotient: aantal sterren van den 2den Typus gedeeld door het aantal sterren van den 1sten Typus en rangschikt men het materiaal naar de E.B., zoo komt het volgende overzicht:

E.B.	Gemidd. E.B.	Typus I.	Typus II.	Typus III.	Q.
7".0—0".7	1".39	3	51		17.0
0 .7—0 .4	0 .52	12	66	1	5.5
0 .4—0 .3	0 .35	14	66		4.7
0 .3—0 .2	0 .24	34	124		3.6[5]
0 .2—0 .16	0 .18	35	67	3	1.9
onmerkbaar		79	35	1	0.44

Men komt dus tot het besluit dat:

De naaste omgeving van ons zonnestelsel bijna uitsluitend sterren van den 2den Typus bevat; dat bij verdere verwijdering van de zon het aantal sterren van den 1sten Typus in verhouding tot dat van den 2den Typus geleidelijk en vrij wel in verhouding tot den afstand, of althans omgekeerd evenredig met de E.B. toeneemt, om daaraan gelijk te worden op een afstand, die correspondeert met eene E.B. van 0"08 of dien omtrent. Bij nog grooter verwijdering gaan de sterren van den 1sten Typus overwegen, zoodat bij de BRADLEY sterren wier E.B. niet meer met zekerheid erkenbaar is, haar aantal reeds meer dan tweemaal dat der sterren van den 2den Typus overtreft.

De »DRAPER Catalogue" bevat slechts enkele sterren zuidelijker dan — 25° declinatie. Het laat zich echter uit bestaande waarnemingen zeer waarschijnlijk maken, dat eene soortgelijke verdeeling ook in het zuidelijk halfrond bestaat. Bedenkt men n.l. dat de sterren van den 1sten Typus bij gelijke visueele grootte een grooter actinisch vermogen bezitten dan die van den 2den Typus, zoo ziet men, dat het gevolg van de gevonden sterverdeeling zijn moet, dat bij

sterren van sterke E.B. het verschil Δm van de photographische en visuele grootte, genomen in den zin Phot. gr. — Vis. gr., in den regel negatief moet uitvallen. Door de waarden van Δm, die men voor de Noordelijke sterren, uit den »DRAPER Catalogue" trekken kan, wordt deze verwachting volkomen bevestigd. Voor de sterren nu van het Z. Halfrond kon de waarde van Δm met hooge nauwkeurigheid getrokken worden uit de waarnemingen, door Spreker zelf verricht ten behoeve van eene photographische »Durchmusterung" van dat Halfrond, ten minste voor sterren, wier helderheid eene niet te aanzienlijke is. Van 81 zuidelijke, niet al te heldere sterren voor wier E B. betrouwbare waarden bekend zijn, bleek bij 72 de waarde van Δm negatief en numerisch grooter dan $0^{mg}1$, bij vier is die waarde gelegen tusschen $+ 0^{mg}.1$ en $- 0^{mg}.1$, terwijl slechts voor 5 een positieve waarde grooter dan 0^{mg} 1 werd gevonden. Het gemiddeld bedrag is $\Delta m = - 0^{mg}.43$.

Spreker gaat vervolgens nog even na de twee volgende vragen:

1°. Is ons zonnestelsel gelegen juist in het centrum van het stelsel, d. i. in dat deel waar de sterren van Typus II het sterkst zijn vertegenwoordigd?

De samenstelling der gegevens naar de rechte klimming geeft voor het quotient Q een minimum in de buurt van 11^h; daarnaar zou het centrum van het stelsel moeten liggen in de richting van 23^h rechte klimming. De Declinatie is nog niet te bepalen en ook aan de realiteit van de bepaalde rechte klimming schijnt twijfel nog zeer geoorloofd.

Uitgebreider onderzoekingen, waarmede reeds een aanvang is gemaakt, zullen in dezen tot meer zekerheid voeren.

2°. Wat is er van den melkweg in dit stelsel? Hierbij gaat Spreker uit van het feit, in het licht gesteld door den Heer PICKERING, dat sterren van den 2den Typus ten naastenbij uniform over den hemel verdeeld zijn. Het quotiënt Q vertoont zelfs voor E.B. tusschen 0″16 en 0″3 nog geene afhankelijkheid van de positie van den melkweg. Bij de boven gebezigde BRADLEY-sterren met onmerkbare E.B. daar-

entegen begint de ophooping van 1ste Type sterren naar den melkweg toe zich te vertoonen.

Spreker vindt n.l. voor deze streken:

in melkweg. . . . . $Q = 0.375$
in galakt. br. $> 55^0$ . . . . . $Q = 0.548$

Intusschen is het twijfelachtig of dit niet daar vandaan komt, dat men in werkelijkheid in de twee streken, niet sterren van geheel gelijke E.B. beschouwt.

Bij PICKERING's algemeene samenstelling wordt, niettegenstaande de gemiddelde E.B. van de »DRAPER Catalogue" sterren stellig *grooter* is dan die van de zooeven beschouwde sterren, een veel aanzienlijker ophooping gevonden. Voor deze sterren toch vindt men

in melkweg en omgeving. . . . . $Q = 0.70$
daarbuiten. . . . . $Q = 1.41$

en dat hoewel hier lang niet zoo extreem gelegen deelen van den hemel worden vergeleken.

Dit komt ontwijfelbaar daar vandaan, dat (naar KOWALSKYS onderzoekingen) sterren ver van den melkweg gemiddeld sterker E.B. hebben dan die, welke in den melkweg gelegen zijn.

Bij de boven beschouwde BRADLEY-sterren moet dit verschil zeer veel geringer zijn, maar het is niet waarschijnlijk dat het geheel vermeden is, of kon worden.

Het is duidelijk, dat men dit onderzoek ook onafhankelijk van de beschouwing van het quotiënt L maken kan, en het uitsluitend kan baseeren op het aantal E.B. van bepaalde grootte, dat in en buiten den Melkweg voorkomt. Een dergelijk onderzoek, uitgebreid over alle BRADLEY-sterren, is reeds ondernomen. Wordt daardoor het hier gevonden resultaat bevestigd, zoo schijnt best aan de waarnemingen te worden voldaan door aantenemen, dat ons sterrenstelsel min of meer den vorm heeft van een bal, omgeven door een ring: een vorm, die in de verte denken doet aan den vorm van de Andromeda-nevel op de photographieën van den Heer ROBERTS.

De Heer KAMERLINGH ONNES biedt voor de Boekerij aan de dissertatie van den Heer J. P. KUENEN. »Metingen betreffende het oppervlak van VAN DER WAALS voor mengsels van koolzuur en chloormethyl. Leiden 1892."

Dit proefschrift is eene verkorte bewerking van eene verhandeling, die weldra in de *Archives Néerlandaises* het licht zal zien.

De schrijver heeft naar aanleiding van de theorie van VAN DER WAALS (*Arch. Néerl.* 24, *Zeitschr. für Phys. Chemie* 5), voor de toepassing waarvan proefondervindelijk materiaal ontbreekt, van drie mengsels van Koolzuur en Chloormethyl tusschen 25° en 160° een reeks isothermen bepaald, ten einde de constanten, waarvan VAN DER WAALS gebruik maakt, te bepalen en zoodoende de constructie van het oppervlak der vrije energie, dat door hem is ingevoerd, te kunnen uitvoeren. Het is hem echter niet gelukt de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS te gebruiken, die, zooals bekend is, reeds voor enkelvoudige stoffen slechts binnen nauwe grenzen de waarnemingen kan voorstellen. Met de eerste vergelijking van CLAUSIUS (*Wied. Ann.* 9) konden de waarnemingen bij het Chloormethyl en een der mengsels zeer goed, bij de beide andere mengsels slechts bij benadering worden beschreven. De berekende constanten in de schrijfwijze van CLAUSIUS zijn de volgende:

	c	β	α	R
Chloormethyl	6.559	0.00175	0.00125	0.003746
1e mengsel $^3/_4$ CH_3Cl.	(4.92)	0.00138	0.00110	0.003731
2e » $^1/_2$ »	4.01	0.00163	0.00098	0.003717
3e » $^1/_4$ »	(2.86)	0.00117	0.00085	0.003702
Koolzuur	2.09	0.00098	0.00084	0.003688

De tusschen haakjes geplaatste waarden zijn slechts middelwaarden van die, welke bij de verschillende temperaturen worden berekend en afzonderlijk worden opgegeven.

Door gebruik te maken van deze vergelijkingen, kan men de lijnen van vrije energie voor de verschillende temperaturen door berekening vinden en dus de constructie van

het vlak van VAN DER WAALS bij benadering uitvoeren; om eenige nauwkeurigheid te verkrijgen, zal het echter noodig zijn de waarnemingen over meerdere tusschengelegen mengsels uit te breiden, daar de wijze, waarop in de vergelijking van CLAUSIUS de constanten van de samenstelling van het mengsel moeten afhangen, niet bekend is.

De kennis van zulk een thermodynamisch oppervlak voor een mengsel is van het hoogste belang bij de studie van de coëxistentie van twee of drie phasen. In deze dissertatie heeft de schrijver deze verschijnselen slechts qualitatief nagegaan; zijne resultaten zijn grootendeels in overeenstemming met die van vroegere onderzoekers, ANDREWS en anderen.

De groote invloed der vertragingsverschijnselen, ook in den homogenen toestand (onvolledige menging), werd uitvoerig nagegaan en ten slotte grootendeels weggenomen door het aanbrengen in de buis, waarin de mengsels onderzocht werden, van een klein weekijzeren roerdertje, dat gedurende de proeven door een electromagneet, die om de buis schuift, in beweging gebracht werd. Zoodoende werden overeenstemmende resultaten verkregen en namen de proeven minder onnoodigen tijd in beslag.

Het vlak worden en verdwijnen van den meniscus, dat bij het voortgaan der condensatie onder bepaalde omstandigheden is waargenomen, werd hier eveneens opgemerkt. Uit de theorie van VAN DER WAALS wordt door den schrijver echter een ander verloop der condensatie afgeleid, dat voor de verdwijning van den meniscus in de plaats gesteld moet worden, en dat hij »retrograde condensatie" noemt: hierbij neemt de hoeveelheid der dichtere phase eerst toe, totdat zij een maximum bereikt, en daarna af, om ten slotte te verdwijnen. Dat de waarnemingen in plaats van deze retrograde condensatie altijd de verdwijning van den menis cus hebben opgeleverd, verklaart de schrijver uit de vertragingsverschijnselen, die bij de aanwezigheid van twee phasen zeer groote afmetingen aannemen. Hij stelt zich voor deze verklaring met het roerdertje op de proef te stellen en, daar door hem inderdaad, onafhankelijk van

deze theoretische beschouwing, somtijds afname der dichtere phase bij samendrukking geconstateerd is, hoopt hij spoedig bij zijn verder onderzoek het geheele verloop der retrograde condensatie te verkrijgen.

De kritische temperaturen der onderzochte mengsels voldoen niet aan de wet van PAWLEWSKI, zooals trouwens te verwachten was.

De volgende waarden werden gevonden:

	waarg.	berek.
Chloormethyl	143.0	143.0
$^3/_4$	123.0	117.8
$^1/_2$	97.1	90.9
$^1/_4$	65.4	62.0
$^1/_9$	46.0	45.1
Koolzuur	31.0	31.0

Ten slotte worden nog tabellen gegeven over de afwijkingen van de wet van DALTON en over de drukvermeerdering door menging.

— De Heer FRANCHIMONT herinnert, naar aanleiding van mededeelingen van den Heer ROUVIER aan de Académie des Sciences (18 Jan. en 28 Maart 1892), omtrent joodamylum, in de eerste plaats aan zijne vóór tien jaren gedane mededeelingen, onder anderen in het Recueil des Travaux chimiques des Pays-Bas, omtrent de vorming en samenstelling van het broomamylum en voegt hieraan toe eenige onuitgegeven waarnemingen omtrent vorming en eigenschappen van joodamylum.

In 1882 was hem gebleken, dat goed gedroogd aardappelzetmeel in droog broom, of in eene oplossing daarvan in chloroform, gebracht kan worden zonder dat beide stoffen eenige werking op elkander uitoefenen. Na 24 uren met chloroform afgewasschen, bleef het zetmeel onveranderd terug, maar elk spoor van vochtigheid moet zorgvuldig vermeden worden. Een stroom droog broomwaterstof, door de vloeistof geleid, bewerkt de vorming van het oranje gekleurde

broomamylum, dat na afwassching met chloroform zijne kleur behoudt. Hierdoor was dus bewezen dat voor de vorming van het broomamylum broomwaterstof noodig is. Bij de analysen van het product, waarbij eerst al het broom door gloeiing met kalk bepaald werd en daarna het geaddeerde broom door behandeling met eene joodkaliumoplossing, waarin het jood in vrijheid gesteld werd, werden niet altijd dezelfde cijfers verkregen, ofschoon de waarschijnlijkheid van een verband tusschen de hoeveelheid broomwaterstof en geaddeerd broom bleek. Zwavelkoolstof bleek als verdunningsmiddel en om af te wasschen ongeschikt.

Voor de bereiding van het joodamylum werd in de eerste plaats gebruikt aardappelzetmeel dat met water, alcohol, aether en chloroform was afgewasschen en boven phosphorzuuranhydride in vacuo gedroogd. Brengt men dit in eene oplossing van zuiver jood in zuiver droog chloroform, dan heeft in 24 uren geene werking plaats. Filtreert men, zorgdragende dat de vochtigheid der lucht geene toetreding heeft, door een gedroogd filtrum en wascht met droog chloroform af, dan blijft het zetmeel kleurloos en geheel joodvrij terug. Leidt men echter door de vloeistof eenige bellen joodwaterstof, dan slaat een bruin poeder neer, dat, na afwassching met chloroform, niet altijd hetzelfde joodgehalte heeft. Met water geeft het nu eens eene blauwe, dan weder eene violette vloeistof, hetgeen van de hoeveelheid gebruikt joodwaterstof schijnt af te hangen.

Neemt men met water gekookt en daarna weer gedroogd amylum, of wel zoogenaamd oplosbaar amylum, uit eene slappe, heldere, waterige oplossing door toevoeging van alcohol neergeslagen, met aether en chloroform afgewasschen en als 't vorige gedroogd, dan blijft het resultaat qualitatief hetzelfde. Zonder aanwezigheid van joodwaterstof vormt zich geen joodamylum.

Tot hetzelfde resultaat kwam ook Mylius in 1887, ofschoon langs geheel anderen weg, en bepaalde de samenstelling.

Spreker heeft getracht het met oplosbaar amylum verkregen product te analyseeren, door de waterige oplossing

met kwik te schudden. Hierdoor wordt het geaddeerde jood in mercurojodide omgezet en de vloeistof geheel kleurloos. Na filtratie werd hierin het joodwaterstof bepaald. Scherpe resultaten werden echter niet verkregen. Dit kan zoowel aan de methode van bereiding als aan die van analyseeren liggen. Onwaarschijnlijk toch is het niet, dat er meerdere joodamylums kunnen zijn, zooals de Heer Rouvier schijnt aan te nemen, en dat volgens spreker's methode een mengsel, volgens die van Mylius eene goed gedefinieerde verbinding, verkregen wordt. Of er heeft volgens deze methode eer eene omzetting van het amylum in andere verbindingen plaats dan volgens die van Mylius, en het verkregen product is dan geen zuiver joodamylum meer. Hierop duidde het feit, dat somwijlen oplossingen van joodamylum, na verwijdering van het geaddeerde jood, een reduceerend vermogen op Fehling's proefvocht uitoefenden.

De beschreven proef om de noodwendigheid van joodwaterstof voor de vorming van het joodamylum aan te toonen wordt door spreker sedert verscheidene jaren in het college getoond.

Neemt men in de plaats van joodwaterstof droog chloorwaterstof, dan heeft er geene werking plaats.

— De Heer Hoffmann biedt voor de werken der Akademie aan eene verhandeling »Contribution à la connaissance du développement de l'appareil uro-génital chez les Oiseaux."

— De Heer Stokvis biedt, uit naam van het Virchow-committee, een exemplaar aan van de medaille, geslagen toen die geleerde onlangs den 70-jarigen leeftijd bereikt had.

— De Heer Bierens de Haan biedt voor de boekerij eene brochure aan van den Heer Lepaige: »Sur l'origine de certains signes d'opération."

— De Heer Schoute brengt ter tafel eene verhandeling van den Heer Dr. H. A. W. Speckman, leeraar aan de Hoogere Burgerschool te Gouda: »Integratie van partieele

differentiaalvergelijkingen van de tweede orde," met verzoek deze op te nemen in de werken der Akademie.

Volgens het Reglement van Orde, wordt deze verhandeling door den Voorzitter in handen gesteld van twee leden, in casu de Heeren GRINWIS en BIERENS DE HAAN, om advies.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 28 Mei 1892.



Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUIJZEN, Voorzitter, LORENTZ, ZAAIJER, ZEEMAN, FORSTER, STOKVIS, RAUWENHOFF, BIERENS DE HAAN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, GRINWIS, HOEK, SCHOUTE, SCHOLS, VAN DIESEN, KAMERLINGH ONNES, KORTEWEG, SURINGAR, MAC. GILLAVRY, BEHRENS, VAN BEMMELEN, PEKELHARING, WEBER, KAPTEYN, ENGELMANN, J. A. C. OUDEMANS, MOLL en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris. Voorts de Heeren Correspondenten: MELCHIOR en SLUITER.

— Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1° H. M. de Koningin-Regentes, 's Gravenhage, 23 Mei 1892; 2° den Minister van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 21 Mei 1892; 3° den Minister van Justitie te 's Gravenhage, 19 Mei 1892; 4° den Minister van Oorlog te 's Gravenhage, 14 Mei 1892; 5° den Commissaris der Koningin in Noord-Holland te Haarlem, 17 Mei 1892; 6° Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, 12 Mei 1892; 7° het Bestuur van de Nederlandsche Handelmaatschappij te Amsterdam, 12 Mei 1892; 8° de Redactie van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde te Amsterdam 11 Mei 1892; 9° C. KERBERT, Directeur van het Kon. Zoölogisch Genoot-

schap »Natura Artis Magistra," te Amstrdam, 14 Mei 1892; 10°. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 10 Mei 1892; 11° A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 11 Mei 1892; 12° W. N. DU RIEU, Bibliothecaris van de Universiteit te Leiden, 14 Mei 1892; 13° A. R. ARNTZENIUS, Griffier van de Tweede Kamer der Staten-Generaal te 's Gravenhage, 11 Mei 1892; 14° J. TIDEMAN, Secretaris van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 12 Mei 1892; 15° den Directeur van de Rijkslandbouwschool te Wageningen. 10 Mei 1892; 16° Burgemeester en Wethouders van Zutphen, 11 Mei 1892; 17° J. BOOL, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer 1892; 18° W. F. C. VAN LAAK, Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1892; 19° C. BOREL, Gouverneur van de Koninklijke Militaire Akademie te Breda, 19 Mei 1892; 20° L. VAN DER STEEN, Bibliothecaris van het Provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te 's Hertogenbosch, 11 Mei 1892; 21° W. COENEN, Secretaris van het Friesch Genootschap van Geschied-, Oudheid- en Taalkunde te Leeuwarden, 14 Mei 1892; 22° J. W. G. VAN HAARST, Bibliothecaris van de Universiteit te Groningen, 11 Mei 1892; 23° den Bibliothecaris van de Società Ariatica di Scienze naturali te Triest, April 1892; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1° het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 28 April, 6 Mei 1892; 2° H. J. BIEGELAAR te Rome, 17 Mei 1892; 3° G. KING, Directeur van de Royal Botanic Garden te Calcutta, 8 Januari 1892; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (13 Mei 1892), waarin wordt medegedeeld, dat aan de Geologische Commissie uit de Afdeeling, voor het loopende jaar, opnieuw een subsidie van *f* 500.— is toegestaan;

2°. missive van denzelfden Minister (14 Mei 1892), waaruit blijkt dat H. M. de Koningin-Regentes de benoeming van de Heeren GIBBS (te New-Haven) en HUXLEY (te Londen) tot buitenlandsche Leden; en van de Heeren Dr J. F. VAN BEMMELEN (te Batavia) en Dr. P. VAN ROMBURGH (te Buitenzorg), tot Correspondenten der Afdeeling heeft goedgekeurd;

3°. een brief van dankzegging voor het hem aangeboden buitenlandsch Lidmaatschap van den Heer HUXLEY;

4°. eene uitnoodiging aan alle Leden der Afdeeling, ter bijwoning van het astronomisch Congres, in 1893 te Chicago te houden.

— De Heeren GRINWIS en BIERENS DE HAAN brengen een gunstig verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. SPECKMAN. Hun voorstel om die verhandeling te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen, wordt aangenomen.

— De Heer BEHRENS deelt eenige bijzonderheden mede over alliages van koper en zink, die de Heer Prof. W. SPRING te Luik door compressie bij gewone temperatuur vervaardigd en welwillend voor mikroskopisch onderzoek overgezonden had. Een monster, van roodachtig gele kleur, was uit een mengsel van 9 deelen koper en 1 deel zink verkregen, een ander monster, licht geel, uit een mengsel van 7 d. koper en 3 d. zink. Beide cilinders waren tweemaal tot poeder gevijld en wederom door drukking compakt gemaakt. Het roodachtige metaal was iets zachter dan gegoten gewoon messing en een weinig pletbaar, het gele metaal was harder dan gewoon messing en bros. Beide monsters bleken eene groote hoeveelheid eener gele alliage te bevatten, die zich geheel amorph voordeed. Zij had een gelijkvormig fijnkorrelig voorkomen en vertoonde geen spoor der fraaie kristallieten, die voor messing, dat door smelten vervaardigd is, in hooge mate karakteristiek zijn. Voorts werden vele hoekige stukjes van rood koper waargenomen, sommige gekneusd en gevouwen, met gele draadjes tusschen de roode brokken en strooken, en eindelijk ietwat zink, aan hoekige

stukjes en aan draden, die van nabij het centrum zich naar het kromme oppervlak trekken, zich daar tot lappen vereenigend. De metaalmassa was nagenoeg kompakt. Zonder twijfel heeft vloeiende of schuivende beweging in de alliage en in het zink plaats gehad, maar niets wijst op eenen vloeibaren toestand in den gebruikelijken verstande. Regelatie schijnt niet te mogen worden aangenomen, terwijl als vastgesteld mag beschouwd worden, dat koper en zink door herhaald vijlen en samenpersen innig gemengd en tot een alliage zijn verbonden geworden. Het is te verwachten dat de heer SPRING langs dezen weg tot alliages van zeer merkwaardige eigenschappen komen zal, en allicht tot alliages, die door smelten niet kunnen verkregen worden.

— De Heer ENGELMANN biedt voor de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer Dr. H. J. HAMBURGER, leeraar aan de Veeartsenijschool te Utrecht: »Over het onderscheid in samenstelling tusschen arterieel en veneus bloed".

Zij wordt door den Voorzitter in handen gesteld van de heeren PEKELHARING en ENGELMANN om daarover verslag uit te brengen in de Juni-vergadering.

— De Heer VAN BEMMELEN biedt, namens de Geologische Commissie, eene 7e mededeeling aan, geschreven door den Heer Dr. SCHROEDER VAN DER KOLK en betrekking hebbend op de erratica uit de omstreken van Markelo. Zij zal in de Verslagen en Mededeelingen worden opgenomen.

Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden:

Door den Heer SCHOUTE (uit naam van den schrijver) het derde deel van: »Curso de Analyse infinitesimal", door F. GOMES TEXEIRA;

en door den Heer WEBER het 2e stuk van het 2e deel zijner »Ergebnisse einer Reise in Niederländisch Ost-Indien".

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de voorzitter de vergadering.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN **Dr. H. A. W. SPECKMAN,**

GETITELD:

INTEGRATIE VAN PARTIEELE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN VAN HOOGERE ORDE.

In het jaar 1870 werd door den Franschen wiskundige DARBOUX eene methode aangegeven, die voor de integratie van partieele differentiaalvergelijkingen der tweede orde van groote waarde is. — Dit gedeelte der wiskunde was sedert de onderzoekingen van AMPÈRE en MONGE niet wezenlijk vooruitgegaan en slechts bij beperkte onderstellingen bleef oplossing mogelijk. De nieuwe methode is op vergelijkingen van iedere soort, zelfs op simultanevergelijkingen toepasselijk.

Zeer onlangs werden onze werken verrijkt met eene Verhandeling van Dr. F. DE BOER te Groningen, waarbij door dezen de nieuwe integratiemethode werd toegepast op eene bepaalde vergelijking der 2de orde; de thans aangeboden verhandeling bepaalt zich niet tot ééne vergelijking, doch geeft een nader onderzoek der methode van DARBOUX zelve.

Genoemde bijdrage splitst zich in twee hoofddeelen: zooals bekend is, bestaat de nieuwe integratiemethode in het opsporen der gemeenschappelijke integralen van twee simultane vergelijkingen, waarvan ééne, de zoogenaamde »*karakteristieke vergelijking*" van den 2en graad t. o. van $\frac{dy}{dx}$ is;

nu is aan het belangrijk geval, dat de wortels dezer karakteristieke vergelijking gelijk zijn, het tweede gedeelte der verhandeling gewijd; het eerste deel betreft het toepasselijk gebruik dier simultane vergelijkingen zelve.

Er zijn volgens DARBOUX *twee* methoden om die hulpvergelijkingen te vinden; door het totaal differentieeren van eene niet lineaire, partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde ontstaan nieuwe vergelijkingen, die lineair zijn en het verlangd stelsel leveren.

Laat dit stelsel voor ieder der wortels der karakteristieke vergelijking, twee integrabele combinatiën toe, zoo is het vraagstuk gevonden — en dit vormt de 1e oplossing-methode van DARBOUX.

Bij de tweede, meer algemeene methode, tracht men eene partieele differentiaalvergelijking der 2e orde te vinden, die met de gegevene vergelijking van de 2e orde eene oplossing gemeen heeft. De schrijver onderzoekt nu, na eene misschien wat al te beknopte uiteenzetting dier beide methoden, welk verband er tusschen de vergelijkingen, volgens beide wijzen van integratie verkregen, bestaat; hij ontwikkelt de bijzondere methoden door de wiskundigen FALK, PICART, HAMBURGER, WINCKLER, KÖNIG, VICTOR VERSAWY gevolgd, methoden, die soms wel algemeener dan die van DARBOUX zijn, doch tot samengestelde berekeningen aanleiding geven, zoodat de methode DARBOUX de voorkeur verdient om hare bruikbaarheid, die vooral door de verhandeling van Dr. DE BOER duidelijk werd aan het licht gesteld.

Gelijk te verwachten was, zijn de langs verschillende wegen verkregen vergelijkingen gelijkwaardig en kunnen, zooals de schrijver dit uitdrukt, in elkander worden overgevoerd.

In het tweede gedeelte zijner verhandeling onderzoekt schrijver uitvoerig het geval eener karakteristieke vergelijking, wier wortels dezelfde waarden bezitten. Hiertoe wordt hij geleid door de vraag »wanneer de bovengenoemde hulpvergelijkingen het grootste aantal, d. i. vijf gemeenschappelijke integralen toelaten". Het ingestelde onderzoek leert, dat in dit geval de wortels der karakteristieke vergelijking

gelijk moeten zijn. De bepaling der vijf integralen volgt zonder moeite, terwijl de algemeene integraal wordt verkregen door in de vijf integralen vier der constanten als willekeurige functiën der vijfde te beschouwen; door eliminatie krijgt men de eindintegraal.

De ontwikkelde theorie wordt nu in N°. 2 van het tweede gedeelte op vijf voorbeelden toegepast en wel eerst op de eenvoudige hoofdvormen van partieele differentiaalvergelijkingen 2e orde, 1e graad:

$$f(r, s, t) = 0, \qquad f(x, r, s, t) = 0, \qquad f(z, r, s, t) = 0,$$
$$f(y, r, s, t) = 0$$

wier integralen zonder bezwaar in algemeenen vorm volgen en waarvan de eerste de vroeger behandelde vergelijking van Dr. de Boer is, de derde niet te integreeren blijkt.

Minder direct volgt de integratie der differentiaalvergelijking $f(q, r, s, t) = 0$, waartoe eene tamelijk lange transformatie noodig is.

In N°. 3 wordt eene klasse vergelijkingen der 2e orde 2e graad onderzocht, die tot de groep der vergelijkingen van Poisson behoort, waarin dus de vorm $r^2 - s\,t$ voorkomt. Twee met veel zorg gekozen voorbeelden lichten de gevondene methode van integratie uitnemend toe.

In N°. 4 wordt de partieele differentiaalvergelijking der tweede orde, lineair in de hoogst afgeleiden, onderzocht en verkrijgt schrijver de *stelling*, dat hare integratie, alsmede die der vergelijking van Ampère, uitgaande én van het stelsel van Monge én van het stelsel van Darboux, afhankelijk is van dezelfde voorwaarde-vergelijkingen — ook krijgt men in beide gevallen hetzelfde hulpstelsel.

Eindelijk bevat N°. 5 eene omgekeerde bewerking, waar, door eliminatie der constante uit de integraalvergelijkingen der in N°. 4 behandelde vergelijking, eene partieele differentiaalvergelijking van denzelfden vorm ontstaat en nieuwe differentiaalbetrekkingen worden afgeleid.

De verhandeling van den Heer Speckman stelt de methode

van DARBOUX gunstig in het licht. Zij getuigt, dat schrijver met zijn onderwerp volkomen vertrouwd is en vormt eene belangrijke bijdrage op dit moeilijk gebied.

Uwe Commissie stelt voor de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen.

Amsterdam, 28 Mei 1892.

C. H. C. GRINWIS.
D. BIERENS DE HAAN.

MEDEDEELINGEN OMTRENT DE GEOLOGIE VAN NEDERLAND, VERZAMELD DOOR DE COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK.

N. 7.

VERSLAG

OVER EENIGE

KRISTALLIJNE ZWERVELINGEN UIT DE OMSTREKEN VAN MARKELO,

DOOR

Dr. J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK.



Zooals in het verslag over mijne nasporingen in den zomer van het jaar 1891 *) is medegedeeld, werd de Markelo'sche leemrug door mij naar het Zuiden vervolgd en keileem tot bij Geesteren aangetoond. Hoever deze leembank zich naar het Noorden zal laten vervolgen, of zij — zooals men uit de topographische kaart en uit de geologische kaart van Staring geneigd zou zijn te besluiten — zich over Holten, Hellendoorn, Lemele, Ommen, Kerkenbosch en Ruinen tot Havelte zal uitstrekken, moet een nader onderzoek leeren.

Van het zuidelijkste punt, bij Geesteren, werden enkele zwervelingen uit den keileem verzameld; een hiervan zal beneden beschreven worden (Ålandsporfier).

Eenige kilometers westelijk treedt de keileem eveneens aan den dag, en wel aan den Lochemerberg. Daar waar de stoomtramlijn van Lochem naar Borkulo op den weg

---

*. Mededeelingen omtrent de geologie van Nederland, verzameld door de Commissie van het geologisch onderzoek N°. 3 bladz. 136 (6).

Lochem—Barchem overgaat, vormt zij een scherpe bocht, en in de holle zijde dezer bocht is de keileem aangesneden.

Het was niet mogelijk hieruit vele gesteenten te verzamelen, doch onder die weinigen bevindt er zich een, dat met eenige waarschijnlijkheid tot de Elfdalensche porfieren moet worden gerekend. Vooral door de laatste publicatie van COHEN en DEECKE is men gewaarschuwd, zich niet te zeer door makroskopische gelijkenis te laten verleiden, maar door een mikroskopische beschrijving de gevaren eener valsche bepaling geringer te maken *).

Eindelijk volgt nog de beschrijving van een diabaas van den Åsbytype tusschen Markelo en Goor verzameld.

N°. 183. *Type:* **Ålandsporfier** (?).

Het blok bereikt bijna de grootte van een vuist, en is tamelijk scherpkantig. Het natuurlijk oppervlak is ongelijkmatig tengevolge der verweering van den amphibool. Verder onderscheidt men ronde grauwe kwartsen met een doormeter van eenige millimeters en rose veldspaat. Op de breuk is de kleur donker bruinrood met vlekken van een zwartachtig mineraal (amphibool).

Mikroskopisch: De *kwarts* vormt groote ronde of afgeronde korrels, waaraan zich sterke corrosieverschijnselen laten waarnemen. Hij is rijk aan vloeistof- en gasinsluitsels; naaldjes zijn vrij zeldzaam.

De porphyrische *orthoklazen* zijn sterk gecorrodeerd en meestal roodbruin gekleurd door een fijn stof; plagioklaas werd niet met zekerheid waargenomen.

De *amphibool* vormt vrij groote individuen van donkergroene kleur. Meestal echter is de kern met andere mineralen (o. a. kwarts) vergroeid of wel verweerd, zoodat het mineraal min of meer een ringvorm aanneemt.

---

*) E. COHEN und W. DEECKE. Ueber Geschiebe aus Neu-Vorpommeren und Rügen 1891 S. 71 zeggen de schrijvers o. a. naar aanleiding der Elfd porf.: Gerade bei diesen Gesteinen darf man sich noch weiniger, als bei anderen Leitgeschieben mit einer noch so weit gehenden makroskopischen Aehnlichkeit begnügen enz.

Gelukkig zijn uit hun voorkomen in Nederland nog geen belangrijke gevolgtrekkingen afgeleid.

Bovendien zijn *zirkoon* en *apatiet* niet zeldzaam en treft men in de grondmassa en elders *magnetiet* aan.

De vindplaats van den zwerveling is de keileem van den Geesterenschen Esch.

N⁰. 181. *Type:* **Elfdalensche porfier.**

Het blok is weinig scherpkantig en is door een verweeringskorst van ongeveer een halven centimeter dikte omgeven. De natuurlijke oppervlakte is lilaächtig grijs van kleur met kristallographisch tamelijk scherp begrensde veldspaten, 3 tot 4 millimeters groot, en (tengevolge van geheele verweering tot een vuilwit mineraal) eenigszins diepliggend. Minder talrijk liggen in de grondmassa porphyrische, isodiametrische individuen van een lichtgroen mineraal. Kwarts vormt donkergrauwe stipjes.

Op de breuk is de grondmassa donker purpergrauw gekleurd met groenachtige veldspaten, waaraan nu en dan tweelingsstreeping valt op te merken en een groen, vezelig mineraal. Ook de kwarts is hier goed te herkennen.

Onder het mikroskoop blijkt de *kwarts* geen eigen kristalvorm te bezitten en niet in porphyrische individuen voor te komen, doch hoogstens uitgebreide aggregaten te vormen, wier korrelgrootte soms vrij gering kan wezen *). Unduleuze uitblussching is zeer algemeen.

De porphyrische *veldspaten* zijn grootendeels sterk verweerd, zoodat plagioklaas slechts zelden met zekerheid was vast te stellen.

De *amphibool* is sterk pleochroitisch, mist een duidelijken kristalvorm en is tamelijk frisch; nu en dan is er viridiet en *epidoot* uit ontstaan.

De *biotiet*, groenachtig gekleurd, vertoont zich voornamelijk in de grondmassa. Met kwarts en veldspaat vormt hij daarvan het hoofdbestanddeel; samen vormen deze mineralen een soort net, in welks mazen de porphyrische bestand-

---

*) Of hieronder veldspaat voorkomt laat zich vrij gemakkelijk uitmaken. Het zuivere kwartsaggregaat is tamelijk ongevoelig voor schuine verlichting, het gemengde aggregaat geeft randen van totale reflectie. Zie ook de Zeitschr. f. wiss. Mikroskopie S. 456 sqq. Bd. VIII 1892.

deelen liggen ingesloten. Ook in de bovengenoemde kwartsaggregaten wordt meer of minder biotiet aangetroffen.

Verder komen nog limoniet, *erts* en *apatiet* met duidelijke afscheiding // oP en stof voor.

Makroskopisch stemt dit gesteente zeer goed met een Elfdalenschen type overeen; mikroskopisch is een vrij groot verschil op te merken. Wel een reden om den wenk van Cohen en Deecke te behartigen. De vindplaats is de keileem van den Lochemerberg.

N⁰. 182. *Type:* **Åsbydiabaas.**

Het gesteente is brokkelig en op de spleten sterk verweerd.

De verweeringskorst vertoont eene duidelijke diabaasstructuur; de veldspaten ter lengte van nog geen centimeter zijn geheel verweerd, de augieten daarentegen zijn tamelijk frisch.

Op de breuk is geen verweering te bespeuren. De plagioklaas is glashelder en bezit duidelijke tweelingsstreepen; augiet, olivyn en nu en dan biotiet laten zich zeer goed onderscheiden. Apatiet is slechts zelden waarneembaar.

Bij het mikroskopisch onderzoek blijkt het volgende:

De *plagioklaas* is, gelijk uit enkele waargenomen uitblusschingshoeken van meer dan 30° bleek, sterk basisch. Bijna tegenover alle overige mineralen is hij idiomorph, met uitzondering van het erts en een paar accessorische mineralen, zooals apatiet. De begrenzing tegenover olivyn is minder scherp dan die tegenover augiet. De vertweelinging heeft zoowel volgens de albiet- als volgens de periklienwet plaats; enkele individuen vertoonen zonaal-unduleuze uitblussching.

De *augiet* dankt zijne rechtlijnige begrenzing steeds aan den plagioklaas. Behalve plagioklaas met scherpe kristalbegrenzing is dikwijls olivyn in afgeronde brokken en magnetiet ingesloten. De eigenlijke insluitsels zijn glas en fijne naaldjes; de laatste, op sommige plaatsen dicht opeengehoopt, vormen steeds evenwijdige stelsels. Het mineraal is nog geheel frisch.

De *olivyn* mist een duidelijken kristalvorm, is veelal door een smallen viridietrand van den plagioklaas gescheiden en min of meer geserpentiniseerd. De insluitsels bestaan deels uit glas, deels uit erts. Beiden kunnen een eigenaardigen langgerekten en vertakten vorm aannemen, zoodat zij een duidelijk netwerk vormen. Het erts is nu en dan rechtlijnig begrensd en blijkt alsdan *magnetiet*, al of niet titaanhoudend, te wezen. Meestal ontbreken echter rechtlijnige grenzen, zijn er brokjes pyriet ingesloten, en is het geheel door een rand van roodbruinen biotiet omgeven. Het is eigenaardig, dat het erts steeds door biotiet van den olivyn wordt gescheiden terwijl zich tusschen het erts en den augiet nimmer biotiet bevindt.

Apatiet is in vrij groote hoeveelheid aanwezig.

Het lijdt geen twijfel, dat de beschreven zwerveling tot den type Åsbydiabaas moet worden gerekend. Evenmin als bij de vondst bij Helpman *) is het echter voorshands mogelijk nauwkeurig den oorsprong in Scandinavië te bepalen.

Vindplaats: Steenbakkerij van Roohaan aan de zuidzijde van den straatweg van Markelo naar Goor.

Leiden, 11 Mei 1892.

---

*) Bijdrage tot de kennis der verspreiding onzer kristallijne zwervelingen, bladz. 44 en bladz. 83—85. Leiden E. J. Brill 1891.

DE DARBOUX'SCHE METHODE TER INTEGRATIE DER NIET LINEAIRE PARTIEELE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE TWEEDE ORDE.

DOOR

Dr. H. A. W. SPECKMAN.

EERSTE GEDEELTE.

§ 1.

Nadat de verhandeling van AMPÈRE *) over de integratie van partieele differentiaalvergelijkingen van de tweede orde in het licht was verschenen, werd in den eersten tijd daarna aan de theorie, door hem ontwikkeld, weinig toegevoegd. Vervolgens gaf BOUR †) aan, hoe in sommige gevallen, in plaats van een compleete oplossing met vijf constanten, men er slechts drie behoefde te kennen, om de algemeene oplossing te kunnen bepalen, terwijl dit geval ook werd behandeld door IMSCHENETSKY §). Het onderzoek der integratie van stelsels partieele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde werd echter naar alle kanten voortgezet en zoo goed als afgesloten, zoodat, op dezen basis voortbouwende, het onderzoek naar de integrabiliteit der vergelijking van de tweede orde op nieuw kon worden ter hand genomen. Van 1870 af tot heden zijn er achtereenvolgens een aantal nieuwe methoden ontwikkeld, waarvan vele een gemeenschappelijke kern bezitten en wier samenhang hier nader zal worden onderzocht. Daar DARBOUX de prioriteit van het grondidee blijkt te bezitten, meenen we deze gemeen-

*) AMPÈRE, Journal de l'Ecole Polytechnique. Cah. 17 en 18.

†) BOUR, Journal de l'Ecole Polytechnique. Cah. 39.

§) IMSCHENETSKY. Grünerts Archiv th. 54.

schappelijke methode den naam te moeten geven van »Methode van DARBOUX". De methode, waarvan DARBOUX eene korte uiteenzetting gaf in de »Annales Scient. de l'Ecole Normale Supérieure" Année 1870, tome 7, geldt voor partieele differentiaalvergelijkingen van elke orde, met een willekeurig aantal veranderlijken.

Wij zullen haar in hoofdzaak mededeelen.

»Voor bizondere klassen van partieele differentiaalvergelijkingen van de tweede en hoogere orde, zegt DARBOUX, bestaan partieele differentiaalvergelijkingen van de n^{de} orde met eene willekeurige functie, waaraan de algemeene oplossing van de gegevene vergelijking voldoet. Deze vormen dus met de oorspronkelijke vergelijking een stelsel simultane partieele differentiaalvergelijkingen. Zijn deze in voldoend aantal voorhanden, dan kunnen wij de waarden van de partieele afgeleiden van de hoogste orde uitdrukken in die van lagere orden en in de willekeurige functiën, en alsdan vormen de vergelijkingen

$$d\, z_{p,q} = z_{p+1,q}\, d\, x + z_{p,q+1}\, d\, y \qquad p + q \leqq n - 1 \text{ *)}$$

een stelsel van totale differentiaalvergelijkingen, dat integreerbaar is, en waardoor dus het probleem als opgelost kan beschouwd worden".

DARBOUX geeft twee wijzen aan om deze hulpvergelijkingen te vinden. Beide zullen we beschouwen.

Hij merkt op, dat als eene niet lineaire partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

totaal gedifferentieerd wordt ten opzichte van x of van y, er nieuwe vergelijkingen ontstaan, nu lineair in de hoogste afgeleiden van z, n. l.:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial p} r + \frac{\partial f}{\partial q} s + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} q + \frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial q} t + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

*) De notatie $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = z_{p,q}$ is gebruikt.

welke geschreven zullen worden

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0, \quad \ldots (2).$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0, \quad \ldots (3).$$

waarin $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ en $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ eene gemakkelijk te begrijpen beteekenis bezitten.

Worden nu nieuwe onafhankelijk veranderlijken ingevoerd, n. l. x en α, waarin α eene nog onbepaalde functie van x en y is, dan heeft men de betrekkingen:

$$\left.\begin{array}{lll}
\frac{\partial z}{\partial \alpha}=q\frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{\partial p}{\partial \alpha}=s\frac{\partial y}{\partial \alpha}, & \frac{\partial q}{\partial \alpha}=t\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \\
\frac{\partial z}{\partial x}=p+q\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial p}{\partial x}=r+s\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial q}{\partial x}=s+t\frac{\partial y}{\partial x}, \\
\frac{\partial p}{\partial \alpha}=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha}-\frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial r}{\partial \alpha}=\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha}-\frac{\partial s}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial s}{\partial \alpha}=\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha}-\frac{\partial t}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}
\end{array}\right\} (4).$$

Door invoering van de nieuwe veranderlijken en gebruikmaking vau de betrekkingen (4) gaat de vergelijking (3) over in:

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial t}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right\}+$$

$$\frac{\partial t}{\partial \alpha}\left\{\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\right\}=0. \quad \ldots\ldots (5).$$

Men kan nu, om redenen die we hier niet behoeven te herhalen, zegt Darboux, stellen:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \quad \ldots\ldots (6).$$

waardoor (5) overgaat in

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial x}=0,$$

welke vergelijking, wegens de betrekking (6), wordt:

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial s}{\partial x}\right\}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0. \quad \ldots \quad (7)$$

Op gelijke wijze leidt hij uit de vergelijking (2) af:

$$\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right\}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial s}{\partial x}=0 \text{ *}) \quad \ldots \quad (8)$$

Ter integratie van de vergelijking (1) heeft hij dus het volgende systeem gewone differentiaalvergelijkingen verkregen:

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{dr}{dx}+\dfrac{1}{m_1}\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{ds}{dx}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{ds}{dx}+\dfrac{1}{m_1}\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{dt}{dx}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=0, \\[2ex] \dfrac{dy}{dx}=m_1, \quad \dfrac{dz}{dx}=p+m_1 q, \quad \dfrac{dp}{dx}=r+m_1 s, \quad \dfrac{dq}{dx}=s+m_1 t, \end{array}\right.$$

waarbij m_1 een wortel is van de vergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial r}m^2-\frac{\partial f}{\partial s}m+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

terwijl buitendien de betrekking $f=0$ bestaat.

Een tweede stelsel verkrijgt men door voor m_1 den tweeden wortel te nemen uit de vierkantsvergelijking in m.

---

*) Voor deze vergelijking staat bij DARBOUX foutievelijk

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}=0.$$

Deze vierkantsvergelijking noemen wij de *karakteristieke* vergelijking. BOOLE *) heeft ze reeds gevonden door variatierekening, en zegt, dat zij in nauw verband staat met de argumenten der willekeurige functiën. Ook bij AMPÈRE komt zij reeds voor.

Aangaande de integratie van stelsel I zegt DARBOUX verder, dat zij in het algemeen niet is uittevoeren, daar het bestaat uit 6 vergelijkingen met 7 onafhankelijk veranderlijken, zoodat de volkomen oplossing niet kan worden verkregen; laat het stelsel echter voor één der waarden van m twee integrabele combinatie's toe, $u = c_1$ en $v = c_2$, dan is $u = \varphi(v)$ eene partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde met eene willekeurige functie, gelijktijdig bestaande met $f = 0$. Kan men voor de tweede waarde van m ook twee zulke integrabele combinatie's vinden, dan is het probleem opgelost.

Is dit echter niet het geval, dan kan men soortgelijke stelsels vormen, waarin de afgeleiden van x en y ten opzichte van z van de 3de orde voorkomen. Alsdan zal dit nieuwe stelsel eenige integrabele combinatie's kunnen toelaten. Indien dit niet het geval is, zoude men kunnen gaan tot de afgeleiden van de 4de orde enz.

De tweede wijze, die DARBOUX in bovengenoemde verhandeling aangeeft, om partieele differentiaalvergelijkingen van de 2de en hoogere orde te bepalen, waaraan de algemeene integraal van de gegevene vergelijking voldoet, is, zegt hij, algemeener.

Hij stelt het volgende probleem:

»Eene partieele differentiaalvergelijking $v = a$ van de n^{de} orde te vinden, die met de gegevene van de tweede orde $f = 0$ eene oplossing gemeen heeft met ten minste ééne willekeurige functie" en hij gaat aldus voort: »Hiervoor merken we op, dat de gegevene vergelijking $f = 0$, $(n - 1)$ maal gedifferentieerd, n vergelijkingen oplevert, die die $n + 2$ afgeleiden van de $(n + 1)^{ste}$ orde bevatten. De

*) Treatise on differential equations. Suppl. vol.

vergelijking $v = a$, gedifferentieerd ten opzichte van x en van y, geeft twee vergelijkingen, die ook de afgeleiden van de $(n + 1)^{ste}$ orde bevatten. Men heeft dan in het geheel $(n + 2)$ vergelijkingen, die lineair de afgeleiden van de $(n + 1)^{ste}$ orde bevatten, en die deze bepalen als functiën van de afgeleiden van lagere orde, indien de twee differentiaalvergelijkingen, waarvan men de gemeenschappelijke oplossing zoekt, willekeurig waren. Dit laatste kan echter niet het geval zijn. Want dan zouden de afgeleiden van de $(n + 1)^{ste}$ orde alle afzonderlijk bepaald worden door de afgeleiden van lagere orde, en alsdan zoude de gemeenschappelijke oplossing, zoo zij bestond, een onbepaald aantal constanten bezitten. Dit zoude niet kunnen. Deze $(n + 2)$ vergelijkingen, die lineair de $(n + 2)$ afgeleiden van de $(n + 1)^{ste}$ orde bevatten, vormen dus een onbepaald systeem, hetgeen voorwaardevergelijkingen oplevert. Daar twee der vergelijkingen de afgeleiden $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z_{p.q}}$ $(p + q \leqq n)$ bevatten, zullen de voorwaardevergelijkingen bestaan uit twee partieele differentiaalvergelijkingen van de 1ste orde, waaraan v moet voldoen. Deze vergelijkingen zijn homogeen en van den *tweeden* graad ten opzichte der afgeleiden in v". Dit is hetgeen DARBOUX van zijne tweede methode zegt.

Laat ons nu nagaan, welk verband er bestaat tusschen de vergelijkingen, volgens de eerste en de tweede methode verkregen, tot welke de integratie van $f = 0$ wordt teruggebracht. Wij zullen zien, dat de vergelijkingen, volgens de eerste en volgens de tweede methode verkregen, gelijkwaardig zijn, en in elkaar kunnen worden overgevoerd.

§ 2.

Zij de partieele differentiaalvergelijking van de 2de orde weder

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

en laat $v = a$ eene nieuwe partieele differentiaalvergelijking

van de *tweede* orde zijn, die met de gegevene eene oplossing gemeen heeft met ten minste eene willekeurige functie. Trachten wij nu volgens de tweede methode van DARBOUX zulk eene vergelijking te bepalen.

Hiertoe differentieeren wij de vergelijkingen $f = 0$ en $v = a$ éénmaal zoowel naar x als naar y; dan verkrijgen wij:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,\quad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0.$$

Daar ondersteld werd, dat er eene gemeenschappelijke oplossing $z = \varphi(x, y)$ bestond, zal:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y}$$

moeten zijn, zoodat de vergelijkingen overgaan in:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial r} z_{3.0} + \frac{\partial f}{\partial s} z_{2.1} + \frac{\partial f}{\partial t} z_{1.2} = 0, \quad . \; . \; . \; (2).$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial r} z_{3.0} + \frac{\partial v}{\partial s} z_{2.1} + \frac{\partial v}{\partial t} z_{1.2} = 0, \quad . \; . \; . \; (3).$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial r} z_{2.1} + \frac{\partial f}{\partial s} z_{1.2} + \frac{\partial f}{\partial t} z_{0.3} = 0, \; . \; . \; . \; .(4).$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial r} z_{2.1} + \frac{\partial v}{\partial s} z_{1.2} + \frac{\partial v}{\partial t} z_{0.3} = 0. \quad . \; . \; . \; (5).$$

Bepalen wij nu de voorwaardevergelijkingen, waaraan, wanneer wij de afgeleiden van z van de 3de orde als onbekenden aannemen, de vergelijkingen (2), (3), (4) en (5) moeten voldoen, opdat zij een onbepaald stelsel vormen. Elimineeren $z_{3.0}$ uit (2) en (3) en $z_{0.3}$ uit (4) en (5), dan heeft men;

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r}\right)z_{2.1}+\left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}\right)z_{1.2}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)z_{2.1}+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)z_{1.2}=0.$$

Zullen deze vergelijkingen afhankelijk van elkaar zijn, dan moeten de betrekkingen bestaan:

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}, \quad 6).$$

hetgeen de tweede partieele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en van den tweeden graad zijn, tot welke de methode van Darboux leidt, voor het geval dat de verlangde vergelijking $v = a$ van de tweede orde is.

Wij zullen nu *in de eerste plaats* de vergelijkingen (6) herleiden tot twéé stelsels van partieele differentiaalvergelijkingen, *lineair* in de afgeleiden van v, waardoor dus de bepaling der integraal van (6), zoo zij bestaat, is teruggebracht tot de integratie van stelsels lineaire partieele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, en *vervolgens* de integraal van de vergelijking (1) door middel van de vergelijkingen $v = a$ bepalen.

Vermenigvuldigen wij hiertoe teller en noemer van het tweede lid der gelijkheden van (6) met $\lambda \frac{\partial f}{\partial t}$, en teller en noemer van het derde lid van (6, met $-\lambda^2 \frac{\partial f}{\partial r}$, waar λ een nog onbepaalden factor is, en tellen dan de tellers samen van deze twee leden van (6) en evenzoo de noemers, dan verkrijgt men als vierde lid van de gelijkheden van (6):

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial r}\left\{\lambda\frac{\partial f}{\partial s}-\lambda^2\frac{\partial f}{\partial r}\right\}\frac{\partial f}{\partial t}-\lambda\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial s}+\lambda^2\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2\frac{\partial v}{\partial t}}{-\lambda\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+\lambda^2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}\left\{\lambda\frac{\partial f}{\partial t}-\lambda^2\frac{\partial f}{\partial s}\right\}}. \quad (7)$$

Bepalen wij nu λ zoodanig, dat ze een wortel is van de vergelijking

$$\lambda^2 \frac{\partial f}{\partial r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

dan gaat (7) over in

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} + \lambda^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial t}}{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} + \lambda^2 \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial t}} = -\frac{1}{\lambda},$$

zoodat dus (6) herleid is tot de *twee* stelsels

$$\text{II.} \left\{ \frac{\frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}} = -\frac{1}{m}, \right.$$

waarbij m achtereenvolgens de waarden verkrijgt van beide wortels der vergelijking.

$$m^2 \frac{\partial f}{\partial r} - m \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad ; \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8a)$$

welke vergelijking de karakteristieke vergelijking (9) van § 1 is. Herleiden wij de stelsels II tot een eenvoudiger vorm.

Noemen wij de wortels van (8a) weder m_1 en m_2, en geven wij in II aan m de waarde m_1, dan komt er:

$$\text{II}a \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + m_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} \frac{\partial v}{\partial r} + m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ &\frac{\partial v}{\partial r} m_1^2 - \frac{\partial v}{\partial s} m_1 + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \end{aligned} \right.$$

Op dezelfde wijze verkrijgt men, door in II m_2 te stellen voor m:

$$\text{II}b \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + m_1\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}}\frac{\partial v}{\partial r} + m_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial v}{\partial t}\,, \\ & \frac{\partial v}{\partial r} m_2^{\,2} - \frac{\partial v}{\partial s} m_2 + \frac{\partial v}{\partial t} = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Ter bepaling der algemeene integraal hebben wij nu de volgende stelling:

Zij $v_1 = c_1$ eene integraal van IIa en $v_2 = c_2$ eene van IIb, zoodanig dat men kan oplossen uit $f = 0$, $v_1 = c_1$ $v_2 = c_2$ de waarden van r, s en t, dan zullen deze de vergelijkingen

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy, \quad dz = p\,dx + q\,dy$$

tot een stelsel totale differentiaalvergelijkingen maken en aldus een integraal opleveren van de vergelijking $f = 0$.

Immers de vergelijkingen (6) zijn verkregen door te veronderstellen dat

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$$

was, waaruit dus volgt dat

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad \text{en} \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

totale differentiaalvergelijkingen zijn, en daar alsdan $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ is, zal dit ook het geval zijn met $dz = p dx + q\,dy$.

Kan men van ieder der stelsels IIa en IIb twee integralen vinden, n.l. v_1 en u_1 van IIa, en v_2 en u_2 van IIb, dan zullen $\varphi_1\,(v_1, u_1) = 0$ en $\varphi_2\,(v_2, u_2) = 0$ ook integralen zijn van IIa en IIb, waardoor dus de algemeene oplossing van de vergelijking $f = 0$ is verkregen.

Wij zullen voor genoemde stelling nog een rechtstreeksch bewijs leveren.

Differentieert men de vergelijkingen $f = 0$ en $v_1 = c_1$ ten opzichte van x, dan verkrijgt men, na eliminatie van $\frac{\partial r}{\partial x}$:

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial x} +$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Op dezelfde wijze geeft differentiatie ten opzichte van y en eliminatie van $\frac{\partial t}{\partial y}$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial r}{\partial y} +$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial v_1}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial s}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Vermenigvuldigt men (9) met $-m_1$ en trekt er (10) van af, dan verkrijgt men, wegens de betrekkingen IIa of II

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y}\right) +$$

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial v_1}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y}\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Op dezelfde wijze verkrijgt men uit de vergelijkingen $f = 0$ en $v_2 = a_2$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial v_2}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial v_2}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y}\right) = 0. (12),$$

Neemt men nu in de vergelijkingen (11) en (12) als onbekenden aan

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial y}\right) \text{ en } \left(\frac{\partial t}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y}\right),$$

dan moet òf de determinant der coefficienten nul zijn, òf

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y},$$

in welk laatste geval het gestelde zou zijn bewezen.

Onderzoeken wij nu de beteekenis van het nul zijn van den determinant, die geschreven kan worden in den vorm *)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & . & \frac{\partial f}{\partial s} & . & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial v_1}{\partial r} & . & \frac{\partial v_1}{\partial s} & . & \frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial r} & . & \frac{\partial v_2}{\partial s} & . & \frac{\partial v_2}{\partial t} \end{vmatrix} = 0. \quad . \; . \; . \; (13).$$

Wegens (8*a*), II*a* en II*b* gelden de betrekkingen

$$\frac{\partial f}{\partial r} m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial r} m_2^2 - \frac{\partial v_1}{\partial s} m_2 + \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial r} m_1^2 - \frac{\partial v_2}{\partial s} m_1 + \frac{\partial v_2}{\partial t} = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

waarbij m zoowel de waarde m_1 als m_2 kan verkrijgen.

Stel

$$\frac{\partial v_1}{\partial r} m_1^2 - \frac{\partial v_1}{\partial s} m_1 + \frac{\partial v_1}{\partial t} = P,$$

dan volgt hieruit en uit twee der vergelijkingen (14), dat (13) gelijk is aan:

---

*) SPECKMAN „Integratie van particele diff. vergelijkingen van hoogere orde" pag. 73, 199. Groningen 1889. Hier wordt dit geval bij partieele diff. vergelijkingen van de n^{de} orde onderzocht.

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial v_2}{\partial r}\right).$$

Is dus de determinant gelijk nul dan is òf

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial v_2}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial v_2}{\partial r}=0,\ \text{òf}\ \frac{\partial v_1}{\partial r}m_1^2-\frac{\partial v_1}{\partial s}m_1+\frac{\partial v_1}{\partial t}=0.$$

In het eerste geval is

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v_2}{\partial r}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial v_2}{\partial s}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial v_2}{\partial t}}\ \ldots\ldots\ (15).$$

In het tweede geval volgt, in verband met (14), dat òf $m_1 = m_2$ is, òf

$$\frac{\partial v_1}{\partial r}(m_1+m_2)+\frac{\partial v_1}{\partial s}=0\ \text{en}\ \frac{\partial v_1}{\partial r}m_1 m_2=\frac{\partial v_1}{\partial t}$$

is, uit welke laatste onderstelling, in verband met de eerste vergelijking van (14) volgt

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial v_1}{\partial r}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial v_1}{\partial s}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial v_1}{\partial t}}\ \ldots\ldots\ (16).$$

Nu kan aan (15) of (16) voldaan zijn als een der functien v eene functie van f was, of als zij geen r, s en t bevat, of als uit die functie en uit $f=0$ de r, s en t kunnen worden geëlimineerd.

In het eerste geval is v geen integraal in den hier bedoelden zin. Het tweede geval, waartoe het derde door eliminatie van den vorm in r, s en t uit $v=0$ en $f=0$ kan worden teruggebracht, kan zich wegens onze aanname van $v=c$ pag. 450 niet voordoen. De determinant (13) wordt

dus enkel nul, als de karakteristieke vergelijking twee gelijke wortels bezit.

Ter bepaling van de algemeene integraal in dit geval, zullen wij in het tweede gedeelte dezer verhandeling eene methode ontwikkelen.

Brengen wij nu verband tusschen het stelsel I van § 1 en II van § 2. Hiervoor vermenigvuldigen wij de tweede vergelijking van IIa met een onbepaalden factor λ, en tellen ze bij de eerste op, dan komt

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + m_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left\{ \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1{}^2\lambda \right\} \frac{\partial v}{\partial r} -$$

$$m_1 \lambda \frac{\partial v}{\partial s} + \left\{ \frac{m_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} + \lambda \right\} \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Het hulpstelsel van LA GRANGE voor deze vergelijking is:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m_2} = \frac{dz}{p + m_2 q} = \frac{dp}{r + m_2 s} = \frac{dq}{s + m_2 t} =$$

$$\frac{-\,dr}{\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1{}^2\lambda} = \frac{ds}{m_1 \lambda} = \frac{-\,dt}{\frac{m_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} + \lambda},$$

en na eliminatie van λ:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m_2} = \frac{dz}{p + m_2 q} = \frac{dp}{r + m_2 s} = \frac{dq}{s + m_2 t} =$$

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial r}\left(dr + m_1\, ds\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial r}\left(ds + m_1\, dt\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}.$$

Eenzeflde stelsel verkrijgt men uit IIb.

Het stelsel II kan dus vervangen worden door de stelsels:

$$\left.\begin{array}{l} dy = m_1\, dx\,, \\ \left(dr + m_2\, ds\right)\dfrac{\partial f}{\partial r} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) dx = 0\,, \\ \left(ds + m_2\, dt\right)\dfrac{\partial f}{\partial r} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) dx = 0\,. \end{array}\right\} \text{III}a$$

$$\left.\begin{array}{l} dy = m_2\, dx\,, \\ \left(dr + m_1\, ds\right)\dfrac{\partial f}{\partial r} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) dx = 0\,, \\ \left(ds + m_1\, dt\right)\dfrac{\partial f}{\partial r} + \left(\dfrac{\partial f}{dy}\right) dx = 0\,. \end{array}\right\} \text{III}b$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}\, m^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\, m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy\,, \quad dp = r\,dx + s\,dy\,, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Maar dit is het stelsel I van DARBOUX, als wij van gewone tot totale differentiaalvergelijkingen overgaan, waarmede dus de gelijkwaardigheid der stelsels I en II is aangetoond.

§ 3.

Behandelen wij nu eenige methoden tot integratie van eene partieele differentiaalvergelijking van de tweede of hoogere orde, die allen tot de stelsels I of II der vorige paragrafen voeren.

In eene verhandeling, van April 1871, kwam M. FALK *) tot het stelsel III. Hij trachtte in de eerste plaats eene vergelijking, lineair in de afgeleiden van de n^{de} orde, te integreeren, door dezelfde methode toe te passen, die

*) FALK. „On the integration of partial differential equations of the nth order". Nova Acta Regiae Soc. Ups. Ser. III, vol. 8, 1872.

BOOLE voor de 2de orde gebruikte, en komt dan tot een stelsel partieele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en hierdoor tot een stelsel totale differentiaalvergelijkingen. Om nu eene niet lineaire vergelijking te integreeren, differentieert hij ze totaal ten opzichte van x en van y, en past nu op deze vergelijkingen, lineair in de hoogste afgeleiden, dezelfde methode als voor lineaire toe. Het onderscheid tusschen de eerste methode van DARBOUX en die van FALK bestaat dus enkel hierin, dat DARBOUX op de gedifferentieerde vergelijking van de tweede orde de methode toepaste, door AMPÈRE voor de lineaire vergelijking gegeven, terwijl FALK die van BOOLE toepaste.

De ontwikkeling van FALK is echter niet helder; hij paste enkel zijne formulen, verkregen voor de integratie van vergelijkingen, lineair in de hoogste afgeleiden, op eene gedifferentieerde niet lineaire vergelijking toe, zonder aan te geven hoe hieruit een algemeene integraal kon gevonden worden of tot eene algemeene integratie methode te komen.

Scherper en helderder treedt het idée van DARBOUX op den voorgrond in eene verhandeling van A. PICART *) »Sur l'integration des équations aux dérivées partielles du sec. ordre", waarvan echter slechts een kort uittreksel verscheen.

Bij de vergelijking van de tweede orde zoekt hij twee andere vergelijkingen van de tweede orde, zoodanig, dat de uit deze drie vergelijkingen bepaalde waarden van r, s en t, voldoen aan

$$\frac{dr}{dy}=\frac{ds}{dx}, \quad \text{en} \quad \frac{ds}{dy}=\frac{dt}{dx}.$$

De integratie van het dan integrabele systeem

$$dz=p\,dx+q\,dy, \quad dp=r\,dx+s\,dy, \quad dq=s\,dx+t\,dy$$

geeft dan in het algemeen eene compleete oplossing met 5 constanten.

---

*) PICART. Comptes Rendus LXXVIII, 882—884, 1874.

Ter bepaling van de twee vereischte vergelijkingen van de tweede orde vindt hij twee stelsels van partieele differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, die hij niet nader opgeeft, welke echter de vergelijkingen van stelsel II zullen zijn.

PICART's methode heeft dus dezelfde basis als de tweede methode van DARBOUX.

Voor het eerst uitvoerig wordt het stelsel II, en wel voor eene vergelijking van de n^{de} orde, afgeleid door HAMBURGER *). Zijne methode komt overeen met die van PICART.

Bij eene partieele differentiaalvergelijking van de n^{de} orde zoekt hij n andere partieele differentiaalvergelijkingen van dezelfde orde, zoodanig, dat de hieruit bepaalde afgeleiden van de n^{de} orde de vergelijkingen

$$d\, z_{p.q} = z_{p+1.q},\ \ d\, x + z_{p.q+1}\, d\, y, \quad (p + q = n - 1),$$

tot een stelsel totale differentiaalvergelijkingen maken.

Voor de vergelijking

$$f(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

wordt de methode aldus:

Door totale differentiatie van de vergelijking (1) naar x en naar y heeft men:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (2).$$

waarbij de gelijkheden moeten bestaan:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

*) HAMBURGER. Journal de Crelle. bd. 93. 1882.

Nu is:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy,\quad ds=\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial y}dy,\quad dt=\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy,$$

welke vergelijkingen, in verband met (3) overgaan in:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial x}dy,\quad ds=\frac{\partial r}{\partial y}dx+\frac{\partial s}{\partial y}dy,\quad dt=\frac{\partial s}{\partial y}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy.$$

Door vermenigvuldiging met een onbepaalden factor m en samenstelling verkrijgt men:

$$\begin{aligned} dr+mds &= \frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial x}\left(dy+mdx\right)+m\frac{\partial t}{\partial x}dy, \\ ds+mdt &= \frac{\partial r}{\partial y}dx+\frac{\partial s}{\partial y}\left(dy+mdx\right)+m\frac{\partial t}{\partial y}dy. \end{aligned} \qquad (4)$$

Bepalen wij nu m zoodanig, dat de vergelijkingen (2) en (4) onafhankelijk van de afgeleiden $\frac{\partial r}{\partial x}$ etc. gevolgen van elkaar zijn. Hiervoor moeten de betrekkingen bestaan:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial r}}=\frac{dy+mdx}{\frac{\partial f}{\partial s}}=\frac{mdy}{\frac{\partial f}{\partial t}}=\frac{dr+mds}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{ds+mdt}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \quad . \quad . \quad (5)$$

Door eliminatie van m uit de eerste drie leden volgt:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Noemen wij de wortels van deze vergelijking μ_1 en μ_2, en de waarden van m, die overeenstemmen met de wortels μ nu m_1 en m_2, dan is

$$m_2=\mu_1 \text{ en } m_1=\mu_2,$$

waardoor (5) en (6) overgaan in

$$\left.\begin{aligned} &\left(dr + m_2\, ds\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx = 0, \\ &\left(ds + m_2\, dt\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx = 0, \\ &\qquad dy = m_1\, dx, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(dr + m_1\, ds\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx = 0, \\ &\left(ds + m_1\, dt\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx = 0, \\ &\qquad dy = m_2\, dx, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 ,$$

$$dz = p\, dx + q\, dy , \quad dp = r\, dx + s\, dy , \quad dq = s\, dx + t\, dy ,$$

welke stelsels IIIa en IIIb zijn.

Zij nu $u = c$ een integraal van (7), dan zal, als men $u = c$ totaal differentieert, en voor de differentialen der variabelen hunne waarden uit (7) in de plaats stelt, deze vergelijking identiek nul moeten zijn, waardoor komt :

$$\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{m_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} dx +$$

$$- \frac{1}{m_2} \left\{ m_2^2 \frac{\partial u}{\partial r} - m_2 \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right\} ds = 0 ,$$

welke vergelijking slechts identiek kan zijn, als de coëfficienten van dx en ds elk voor zich nul zijn, waaruit volgt:

$$\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \right\} \frac{\partial f}{\partial r} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{m_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = 0 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} m_2^2 - \frac{\partial u}{\partial s} m_2 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 ,$$

hetgeen weder het stelsel II is.

Tot hetzelfde stelsel III komt WINCKLER *), door op de gedifferentieerde vergelijking van de tweede orde ten opzichte van x, en eveneens ten opzichte van y, de methode van MONGE, geldig voor vergelijkingen, lineair in de hoogste afgeleiden van z, toe te passen. Uit de aldus ontstane nieuwe vergelijkingen moeten dan, in verband met

$$d\, z_{p.q} = z_{p+1.q}\, d\, x + z_{p.q+1}\, d\, y , \qquad p + q \overline{\overline{<}}\, 2,$$

integralen gevonden worden.

Deze methode stemt dus volkomen met de eerste van DARBOUX overeen en leidt rechtstreeks tot het stelsel III.

Tot het stelsel II komt ook JULIUS KÖNIG †) door vergelijkingen van de tweede orde te zoeken, die, met de gegevene vergelijking van de tweede orde, waarden geven voor r, s en t, die de vergelijkingen

$$d p = r\, d x + s\, d y, \quad d q = s\, d x + t\, d y, \quad d z = p\, d x + q\, d y$$

tot een stelsel totale differentiaalvergelijkingen maken.

Zijne methode stemt overeen met die van PICART en dus met de tweede afleiding van DARBOUX.

Zij de gegevene vergelijking

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \; **),$$

*) WINCKLER, „Ueber eine neue Methode zur Integration partieller Differential-Gleichungen zweiter Ordnung". Sitzb. der. K. Akad. der Wissenschaften. Wien, abth. II, bd. 88 en bd. 89, 1883 en 1884.

†) J. KÖNIG, „Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Annalen, bd. 24, 1884.

**) KÖNIG voert volgende bewerkingen uit voor de vergelijking in den vorm $r = f\,(x, y, z, p, q, s, t)$, terwijl u en v dan verondersteld worden geen r te bevatten.

en zijn de te bepalen vergelijkingen $u = a$, $v = b$, dan verkrijgt men door totale differentiatie ten opzichte van x en van y:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Uit deze 6 vergelijkingen kan men oplossen

$$\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Bepalen we nu u en v zoodanig, dat men heeft

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \text{ en } \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x},$$

dan voldoen u en v aan de gestelde voorwaarden.

Oplossing en gelijkstelling dezer waarden geeft de twee volgende betrekkingen:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix},$$

en

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Hierbij is aangenomen, dat de determinant, die de gemeenschappelijke noemer was van $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$, $\frac{\partial s}{\partial x}$ en $\frac{\partial t}{\partial x}$, niet verdwijnt; is dit het geval, dan had volgens § 2 de karakteristieke vergelijking twee gelijke wortels, en kan de integraal op deze wijze niet worden verkregen.

Bovenstaande betrekkingen tusschen de afgeleiden van f, u en v, zijn twee vergelijkingen van de eerste orde en van den tweeden graad, die u en v bepalen als functien van x, y, z, p, q, r, s, t. Opdat nu die vergelijkingen algebraïsch equivalent zijn, moeten de coëfficienten der verschillende afgeleiden van v in beide vergelijkingen evenredig zijn, waaruit volgt:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}}=\frac{\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}=$$

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial s}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}=$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}.$$

De drie eerste gelijkheden zijn die van (6) § 2.

De twee volgende blijken mathematische gevolgen der drie eersten te zijn.

Voor het geval dat het stelsel II*a* of II*b* geen integralen bevat, die *r*, *s* en *t* bevatten, en dus geene compleete oplossing en hieruit door variatie van constanten eene algemeene oplossing kan worden verkregen, ontwikkelt König eene nieuwe methode, om tot eene compleete oplossing te geraken, die echter niet rechtstreeks met de boven ontwikkelde in verband staat.

Ten slotte werd door Victor Sersawy *), op dezelfde wijze als door Hamburger, het stelsel III afgeleid ter integratie van de partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde.

Door *x* alsdan als eenig onafhankelijk veranderlijke aan te nemen, gaat het stelsel III over in stelsel I. In plaats van nu door toepassing van den regel van Jacobi te onderzoeken, in welk geval elk der stelsels I*a* en I*b* integralen bezitten, en alsdan door oplossing van *r*, *s* en *t* tot eene algemeene integraal te geraken, integreert hij stelsel I*a*, door één der afhankelijk veranderlijken, n. l. *s* als eene voorloopig nog onbepaalde functie van *x* te beschouwen, en die alsdan door het stelsel I*b* te bepalen, waardoor de integratie tot eene differentiaalvergelijking in die afhankelijk

---

*) Sersawy, »Die Integration der partiellen differential Gleichung zweiter Ordnung". Denkschriften der Kaiserlichen Acad. van Wissenschaften. Wien. Math. Phys. Abth. bd. 49, 1885.

veranderlijke en in x moet kunnen teruggebracht worden. Is deze afhankelijk veranderlijke door integratie der gewone differentiaalvergelijking bepaald, dan is het stelsel Ia volkomen te integreeren en alsdan kan uit deze integralen, in verband met stelsel Ib, de algemeene integraal door een stelsel PFAFF'sche vergelijkingen worden gevonden.

Hoewel SERSAWY's methode van integreeren dus veel algemeener is dan die van DARBOUX, en deze geheel als bijzonder geval in zich sluit, geeft ze, reeds voor eenvoudige gevallen als de vergelijking $r - t = 0$ tot samengestelde berekeningen aanleiding, zoodat, wanneer het stelsel Ia en Ib integrabel is, de afleiding der algemeene integraal volgens de methode van DARBOUX steeds de voorkeur verdient.

Het aantal toepassingen van de ontwikkelde theorie op de partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde, is gering. WINCKLER, loc. cit., paste de theorie toe op eenige eenvoudige bekende vergelijkingen, lineair in de hoogste afgeleiden der afhankelijk veranderlijke.

De bruikbaarheid der methode van DARBOUX boven andere methoden werd aangetoond door DE BOER *), die de vergelijking $f(r, s, t) = 0$ hierdoor algemeen integreerde. Hij leidde de meest algemeene, hiertoe behoorende, partieele differentiaalvergelijking af, en bepaalde de integralen van de stelsels van DARBOUX van die vergelijking. Verder werd aangegeven, hoe, met behulp der gevondene integralen, die willekeurige functiën bevatten, door integratie der differentiaalvergelijkingen

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

die totale differentiaalvergelijkingen moesten zijn, hetgeen ook het geval was, de algemeene integraal kon worden worden bepaald, en werd deze integratie volledig uitgevoerd, behalve voor een enkel bijzonder geval, waar de groote samengesteldheid der eindintegraal de berekening deed staken.

---

*) Dr. F. DE BOER. Versl. d. Kon. Acad. v. Wetenschappen. Afd. Natuurkunde. 3de Reeks. Deel VIII, 1891.

TWEEDE GEDEELTE.

INTEGRATIE DER PARTIEELE DIFFERENTIAALVERGELIJKING VAN DE TWEEDE ORDE, WAARVAN DE KARAKTERISTIEKE VERGELIJKING TWEE GELIJKE WORTELS BEZIT.

---

§ 1.

Zij te integreeren de vergelijking

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

De integratie hebben wij teruggebracht tot die van het stelsel II § 2, Eerste Gedeelte, nl.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r} m_1^{\;2} - \frac{\partial u}{\partial s} m_1 + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \;, \quad \text{of } \Delta_1 u = 0 \,, \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} \frac{\partial u}{\partial r} + m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ of } \Delta_2 u = 0 \,, \end{aligned}\right\} (2)$$

waarbij m_1 en m_2 wortels zijn der vergelijking

$$\frac{\partial f}{\partial r} m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Het grootste aantal gemeenschappelijke integralen van het stelsel (2), in verband met (1), is vijf.

Stellen wij de vergelijkingen van (2) symbolisch voor door $\Delta_1 u = 0$ en $\Delta_2 u = 0$, dan is de voorwaarde, dat dit aantal integralen bestaat:

$$(\Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1)\, u = 0, \text{ of}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Delta_1 m_2 + q\frac{\partial u}{\partial z}\Delta_1 m_2 + (m_1^2 - m_1 m_2 + s\,\Delta_1 m_2)\frac{\partial u}{\partial p} +$$

$$(m_2 - m_1 + t\,\Delta_1 m_2)\frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial r}\Delta_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} - \frac{\partial u}{\partial t}\Delta_1 \left\{ m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right\} +$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r}\Delta_2 m_1^2 + \frac{\partial u}{\partial s}\Delta_2 m_1 = 0\ ,$$

welke betrekking, in verband met (2), overgaat in:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Delta_1 m_2 + q\frac{\partial u}{\partial z}\Delta_1 m_2 + (m_1^2 - m_1 m_2 + s\Delta_1 m_2)\frac{\partial u}{\partial p} +$$

$$(m_2 - m_1 + t\,\Delta_1 m_2)\frac{\partial u}{\partial q} - \left\{ \Delta_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1 \Delta_2 m_1 \right\} \frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$-\left[\Delta_1 \left\{ m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right\} - \frac{1}{m_1}\Delta_2 m_1\right]\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Zal deze vergelijking nul zijn, dan moeten de coëfficienten der afgeleiden van u afzonderlijk nul zijn, waaruit volgt:

$$\Delta_1 m_2 = 0\ , \quad m_1 - m_2 = 0\ , \ldots\ldots (4)$$

$$\Delta_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} + m_1 \Delta_2 m_1 = 0\ , \ldots\ldots (5)$$

$$\Delta_1 \left\{ m_2 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right\} - \frac{1}{m_1}\Delta_2 m_1 = 0 \ldots (6)$$

Hieruit volgt dat, daar $m_1 = m_2$ moet zijn, de karakteristieke vergelijking twee gelijke wortels moet bezitten of

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 - 4\,\frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

moet zijn.

Integreeren wij deze vergelijking, dan is de gegeven partieele differentiaalvergelijking het resultaat der eliminatie van m uit

$$r + m\,s = 2\,F(x, y, z, p, q, m) - m\,\frac{\partial F}{\partial m} \text{ en } s + m\,t = \frac{\partial F}{\partial m}, \quad (7)$$

waarbij F eene willekeurige functie is.

Tevens blijkt m de wortel te zijn der karakteristieke vergelijking van (7).

Want schrijft men (7) in den vorm

$$r + 2\,m\,s + m^2\,t = 2\,F, \quad s + m\,t = \frac{\partial F}{\partial m}, \quad . \; . \quad (8)$$

dan heeft men, door differentiatie der eerste vergelijking van (8), lettende op de tweede:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = 2\,m, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = m^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

en de karakteristieke vergelijking van (8) wordt:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\,\alpha^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\,\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \text{ of } \alpha^2 - 2\,m\,\alpha + m^2 = 0,$$

zoodat dus $\alpha = m$ is, zooals behoort.

Zijn de wortels gelijk, dan blijkt ook voldaan te zijn aan de eerste vergelijking van (4), n.l. $\Delta_1\,m = 0$.

Immers

$$\left(m_1^2\,\frac{\partial m_2}{\partial r} - m_1\,\frac{\partial m_2}{\partial s} + \frac{\partial m_2}{\partial t}\right) + \left(m_2^2\,\frac{\partial m_1}{\partial r} - m_2\,\frac{\partial m_1}{\partial s} + \frac{\partial m_1}{\partial t}\right)$$

blijkt voor $m_1 = m_2$ nul te zijn, waaruit volgt

$$m^2 \frac{\partial m}{\partial r} - m \frac{\partial m}{\partial s} + \frac{\partial m}{\partial t} = 0.$$

De voorwaardevergelijkingen (5) en (6) laten zich, in verband met (9), alsdan schrijven:

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + m\, \Delta_2\, m = 0, \text{ en } \Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2\, m = 0.$$

Uit deze twee verkrijgt men gemakkelijk:

$$\Delta_1 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + m \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

en

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2\, m = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Daar nu volgens (8)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \text{ en } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -2 \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

is, wordt (10)

$$\Delta_1 \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + m \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right\} = 0,$$

of

$$\Delta_1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} m + \frac{\partial F}{\partial z} (p + m q) + \frac{\partial F}{\partial p} (r + m s) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial q} (s + m t) \right\} = 0.$$

Aan deze vergelijking is echter steeds voldaan, zoodat als voorwaardevergelijking, dat het stelsel (2) vijf integralen bezit, enkel overblijft de betrekking (11), of

$$\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right) + m \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{\partial m}{\partial r} - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\partial m}{\partial t} - \Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0. (11).$$

Daar nu verder, als men $\frac{\partial F}{\partial m} = F'_m$ schrijft,

$$\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right) = \frac{\left(\frac{\partial F'_m}{\partial x}\right)}{t - F''_m} \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right) = \frac{\left(\frac{\partial F'_m}{\partial y}\right)}{t - F''_m}$$

is, wordt (11)

$$\left(\frac{\partial F'_m}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial F'_m}{\partial y}\right) - 2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + 2\,(t - F''_m)\left(\frac{\partial F}{\partial q} - m\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0\,,$$

of

$$\frac{\partial F'_m}{\partial x} + m\,\frac{\partial F'_m}{\partial y} + \frac{\partial F'_m}{\partial z}(p + mq) +$$

$$2\,\frac{\partial F'_m}{\partial p}\,F + F'_m\left(\frac{\partial F'_m}{\partial q} - m\,\frac{\partial F'_m}{\partial p}\right) +$$

$$-2\left\{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\,q + \frac{\partial F}{\partial p}\,F'_m + F''_m\left(\frac{\partial F}{\partial q} - m\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\} = 0. \quad (12).$$

Integreeren wij nu de vergelijking

$$f\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

of

$$r + 2\,m\,s + m^2\,t = 2\,F\,, \quad s + m\,t = \frac{\partial F}{\partial m}\,, \quad . \; . \; (13)$$

waarbij F voldoet aan de vergelijking (12).

Het stelsel (2) wordt alsdan :

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,, \\ &\frac{\partial u}{\partial r}\,m^2 - \frac{\partial u}{\partial s}\,m + \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (14).$$

Wij zullen nu de integratie hiervan terugbrengen tot die van éene lineaire partieele differentiaalvergelijking van de eerste orde.

Door de tweede vergelijking van (14) met den onbepaalden factor λ te vermenigvuldigen, bij de eerste van (14) op te tellen, het stelsel van LA GRANGE te vormen, en dan λ te elimineeren, verkrijgt men:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{r+ms}=\frac{dq}{s+mt}=\frac{dr+mds}{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}=\frac{ds+mdt}{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \quad (15).$$

Vermenigvuldigen wij teller en noemer van de leden van dezen vorm respectievelijk met

$$\frac{\partial m}{\partial x},\ \frac{\partial m}{\partial y},\ \frac{\partial m}{\partial z},\ \frac{\partial m}{\partial p},\ \frac{\partial m}{\partial q},\ \frac{\partial m}{\partial r} \text{ en } \frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial t},$$

dan ontstaat het nieuwe lid:

$$\frac{\frac{\partial m}{\partial x}dx+\frac{\partial m}{\partial y}dy+\frac{\partial m}{\partial z}dz+\frac{\partial m}{dp}dp+\frac{\partial m}{\partial q}dq+\frac{\partial m}{\partial r}dr+\left(\frac{\partial m}{\partial r}m+\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial t}\right)ds+\frac{\partial m}{\partial t}dt}{\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+m\left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial m}{\partial r}-\frac{1}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial m}{\partial t}}.$$

Daar

$$m^2\frac{\partial m}{\partial r}-m\frac{\partial m}{\partial s}+\frac{\partial m}{\partial t}=0$$

is, kan de teller vervangen worden dm, terwijl de noemer $\Delta_2 m$ is, zoodat het nieuwe lid van (15) wordt $\frac{dm}{\Delta_2 m}$, of, daar wegens (11)

$$\Delta_2 m=\Delta_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=2\left(m\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

is, wordt (15):

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{r+ms}=\frac{dq}{s+mt}=\frac{dm}{2\left(m\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial q}\right)}.$$

Voegt men voor $r + ms$ en $s + mt$ de waarden uit (13) in, dan verkrijgt men :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{p + mq} = \frac{dp}{2F - mF'_m} = \frac{dq}{F'_m} = \frac{dm}{2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)} .$$

Maar dit is het hulpstelsel van de partieele differentiaal-vergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + (p + mq)\frac{\partial u}{\partial z} + (2F - mF'_m)\frac{\partial u}{\partial p} +$$
$$F'_m\frac{\partial u}{\partial q} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

tot welke vergelijking dus de integratie van (13) is teruggebracht.

Om de beteekenis van de integralen van deze vergelijking na te gaan in verband met de integratie van (13), beschouwen wij het stelsel (2), ontwikkeld volgens de methode van Darboux in het Eerste Gedeelte § 1.

Alsdan blijkt, dat deze integralen zoodanig zijn, dat zij met de gegevene partieele differentiaalvergelijking eene gemeenschappelijke oplossing bezitten, terwijl, als

$$\varphi_i(x, y, z, p, q, m, c_i) = 0, \quad i = (1, 2, 3, 4, 5) \quad . \quad . \quad (17)$$

deze integralen zijn, dit ook het geval zal zijn met

$$c_2 = \psi_1(c_1), \quad c_3 = \psi_2(c_1), \quad c_4 = \psi_3(c_1), \quad c_5 = \psi_4(c_1) \, . \, (18).$$

Ter bepaling van de algemeene integraal van (13) hebben wij dan verder nog de vergelijkingen

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx +$$
$$t\,dy, \quad dy = m\,dx \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (19).$$

Zooals wij vroeger hebben aangetoond, verviel voor het geval van twee gelijke wortels der karakteristieke vergelij-

king het bewijs, dat waarden van p, q, r, s, en t, verkregen uit de integralen (17), de vergelijkingen (19) integrabel maken. Bepalen wij nu de willekeurige functien uit (18) zoodanig, dat dit wel het geval is, dan hebben wij de algemeene integraal van (13), die alsdan twee willekeurige functien moet bevatten. Voeren wij hiertoe, in plaats van x en y, de nieuwe onafhankelijk veranderlijken x en $c_1 = c$ in, dan gaan de betrekkingen (19) over in:

$$\frac{\partial z}{\partial c} = q \frac{\partial y}{\partial c}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

$$\frac{\partial p}{\partial c} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \ldots\ldots \quad (21),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Lossen wij uit de vergelijkingen (18) nu y, z, p, q en m op, dan komt:

$$\left.\begin{array}{l} m = \chi_0 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ q = \chi_1 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ p = \chi_2 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ z = \chi_3 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}, \\ y = \chi_4 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23).$$

Kunnen wij de willekeurige functien van (23) zoodanig bepalen, dat aan (20), (21) en (22) is voldaan, terwijl er slechts twee willekeurig blijven, dan is de algemeene integraal van (13) gevonden, daar die alsdan kan verkregen worden door eliminatie van c uit

$$z = \chi_3 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}$$

en

$$y = \chi_4 \{x,\ c,\ \psi_1(c),\ \psi_2(c),\ \psi_3(c),\ \psi_4(c)\}.$$

Aan de vergelijking (22) is door (23) steeds voldaan,

als aan (20) en (21) voldaan is. Want de vergelijking $dz = p\,dx + q\,dy$ is een der vergelijkingen van het hulpstelsel dat wij geintegreerd hebben, en substitueeren wij hierin de waarden van y, z, p en q, uitgedrukt in de x en de vijf integratie constanten, dan zal deze vergelijking eene indentiteit worden, in de onderstelling, dat de vijf constanten werkelijk constant zijn. In dit geval is aan (22) voldaan.

Beschouwen wij echter vier der constanten als functiën der vijfde, waarbij de betrekkingen (23) gelden, dan wordt (22):

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial c} + q\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

of

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \left(p + q\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right)\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \ldots \quad (24).$$

Daar wij onderstelden dat aan (20) voldaan was, is dus ook in dit geval aan (24) voldaan.

Er blijven nog over (20) en (21). Nu is (21) de afgeleide van (20) ten opzichte van x. (x en c als onafhankelijk veranderlijken beschouwd).

Bepalen wij dus de willekeurige functiën zoo, dat aan

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c} = 0 \quad \text{of} \quad L = 0 \ldots\ldots \quad (20)$$

en hare afgeleiden ten opzichte van x is voldaan.

Hierin zijn z, q en y als functiën van x en c, uit (23) bepaald, te beschouwen. Wij zullen alsdan twee betrekkingen tusschen de vier willekeurige functiën vinden en niet meer, waaruit volgt, dat de gevonden integraal nog twee willekeurige functiën bevat en dus de algemeene integraal is.

Bewijzen wij daartoe dat de vergelijking (20) van den vorm $A\,\lambda(x) + B\,\mu(x) = 0$ is, waarin $\lambda(x)$ en $\mu(x)$ functiën van x zijn en A en B enkel functiën van c.

Zullen alsdan de afgeleiden ten opzichte van x ook nul zijn, dan moet én $A = 0$ én $B = 0$ zijn, waarmede de gezochte betrekkingen zijn gevonden.

Door differentiatie van $\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}$ of L ten opzichte van x ontstaat:

$$\frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - (s + mt)\frac{\partial y}{\partial c} =$$

$$\frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - F'(m)\frac{\partial y}{\partial c} = \frac{dL}{dx}.$$

Differentieeren wij dezen vorm weer ten opzichte van x (x en c als onafhankelijk veranderlijken aannemende), dan komt er:

$$\frac{d^2L}{dx^2} = \frac{\partial(r + ms)}{\partial c} + m\frac{\partial(s + mt)}{\partial c} + \frac{dm}{dx}\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{dF'(m)}{dx}\frac{\partial y}{\partial c} - F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} =$$

$$\frac{\partial(2F - mF')}{\partial c} + m\frac{\partial F'}{\partial c} - F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} + \frac{dm}{dx}\frac{\partial q}{\partial c} - \frac{dF'(m)}{dx}\frac{\partial y}{\partial c} =$$

$$2\frac{\partial F}{\partial c} - 2F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} + \frac{dm}{dx}t\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{\partial q}{\partial c} - t\frac{\partial y}{\partial c}\right)\frac{dm}{dx} - \frac{dF'(m)}{dx}\frac{dy}{dc} =$$

$$2\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial z}q\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial p}s\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial q}t\frac{\partial y}{\partial c}\right\} + 2\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c}\right) +$$

$$+ 2\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial c} - s\frac{\partial y}{\partial c}\right) + 2\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial c} - t\frac{\partial y}{\partial c}\right) - 2F'(m)\frac{\partial m}{\partial c} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)t\frac{\partial y}{\partial c} +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial F}{\partial p}m - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial c} - t\frac{\partial y}{\partial c}\right) - \left\{\left(\frac{\partial F'm}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial F'm}{\partial y}\right)\right\}\frac{\partial y}{\partial c} - F''(m)\frac{dm}{dx}\frac{\partial y}{\partial c} =$$

$$\left[2\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \left\{\left(\frac{\partial F'(m)}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial F'(m)}{\partial y}\right)\right\} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\{t - F''(m)\}\right]\frac{\partial y}{\partial c} +$$

$$2\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial h}{\partial c}\right) + 2\left\{\frac{\partial p}{\partial c} + m\frac{\partial q}{\partial c} - (s + mt)\frac{\partial y}{\partial c}\right\}\frac{\partial F}{\partial p}.$$

Nu is de coefficient van $\frac{\partial y}{\partial c}$ nul, daar dit juist de voor-

waardevergelijking (12) is, terwijl de coefficient van $\frac{\partial F}{\partial z}$ juist L is, en $\frac{dL}{dx}$ die van $\frac{\partial F}{\partial p}$ is. Men heeft dus:

$$2\frac{\partial F}{\partial z}L + 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dL}{dx} = \frac{d^2L}{dx^2},$$

of

$$\frac{d^2L}{dx^2} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dL}{dx} - 2\frac{\partial F}{\partial z}L = 0. \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Dit is eene lineaire differentiaalvergelijking in L, waarvan de integraal is $L = A\,\lambda(x) + B\,\mu(x)$, waarin A en B integratie constanten en $\lambda(x)$ en $\mu(x)$ particuliere oplossingen zijn. De vergelijking (20) is dus van den vorm

$$A\,\lambda(x) + B\,\mu(x) = 0,$$

wat te bewijzen was.

Wij hebben dus de volgende stelling bewezen:

Ter integratie van de partieele differentiaalvergelijking van de 2de orde, waarvan de karakteristieke vergelijking twee gelijke wortels bezit, en die dus is van den vorm:

$$\left.\begin{aligned} r + m\,s &= 2\,F(x, y, z, p, q, m) - m\frac{\partial F}{\partial m}, \\ s + m\,t &= \frac{\partial F}{\partial m}, \end{aligned}\right\} \quad . . (A).$$

bepalen wij de vijf integralen van de vergelijking

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + (p + m\,q)\frac{\partial u}{\partial z} + (2\,F - m\,F'_m)\frac{\partial u}{\partial p} + \\ &\quad F'_m\frac{\partial u}{\partial q} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial m} = 0. \end{aligned}\right\} . (B).$$

Voldoet nu F aan de voorwaardevergelijking

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F''_m}{\partial x}+m\dfrac{\partial F''_m}{\partial y}+\dfrac{\partial F''_m}{\partial z}(p+mq)+2\dfrac{\partial F''_m}{\partial p}F+\\ \qquad F'_m\left(\dfrac{\partial F''_m}{\partial q}-m\dfrac{\partial F''_m}{\partial p}\right)+\\ -2\left\{\dfrac{\partial F}{\partial y}+q\dfrac{\partial F}{\partial z}+F'_m\dfrac{\partial F}{\partial p}+F''_m\left(\dfrac{\partial F}{\partial q}-m\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)\right\}=0,\end{array}\right\}\ .(C).$$

dan zal de algemeene integraal worden verkregen, door in de vijf integralen vier der constanten als willekeurige functiën van de vijfde te beschouwen en alsdan p, q en m te elimineeren.

Door eliminatie van de constante uit de twee overige vergelijkingen verkrijgt men de eindintegraal, waarin twee der willekeurige functiën nog bepaald worden door de vergelijking $\dfrac{\partial z}{\partial c}-q\dfrac{\partial y}{\partial c}=0$, die van den vorm $A\,\lambda\,(x)+B\,\mu\,(x)=0$ is, waaruit de betrekkingen volgen $A=0$ en $B=0$, waarbij men z, q en y uitdrukt in x, c en de willekeurige functiën van c

§ 2.

Passen wij de boven ontwikkelde theorie op eenige voorbeelden toe.

Zij te integreeren de vergelijking

$$f(r,\ s,\ t)=0.$$

De partieele differentiaalvergelijking wordt volgens (A):

$$\left.\begin{array}{l}r+m\,s=2\,F(m)-m\dfrac{dF}{dm},\\ s+m\,t=\dfrac{dF}{dm}.\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (1).$$

Het hulpstelsel is volgens (B):

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{2\,F(m)-m\,F'(m)}=\frac{dq}{F'(m)}=\frac{dm}{0}.$$

Integralen zijn:

$$m = c,\ q = x F'(c) + c_2,\ p = -c x F'(c) + 2 x F(c) + c_3,$$

$$z = x^2 F(c) + (c_3 + c c_2) x + c_4,\quad y = c x + c_1.$$

Stellen wij c_1, c_2, c_3 en c_4 gelijk aan willekeurige functiën van c, dan heeft men ter bepaling daarvan

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q \frac{\partial y}{\partial c} = L = 0.$$

De vergelijking (25) is $\frac{d^2 L}{d x^2} = 0$, dus $L = A x + B = 0$.

Door invoeging van de waarden van z, q en y in $L = 0$ verkrijgt men:

$$\left(\frac{\partial c_3}{\partial c} + c \frac{\partial c_2}{\partial c} - \frac{\partial c_1}{\partial c} \frac{\partial F}{\partial c}\right) x + \left(\frac{\partial c_4}{\partial c} - c_2 \frac{\partial c_1}{\partial c}\right) = 0,$$

zoodat de betrekkingen tusschen de willekeurige functiën zijn:

$$\frac{\partial c_3}{\partial c} + c \frac{\partial c_2}{\partial c} - \frac{\partial c_1}{\partial c} \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \text{ en } \frac{\partial c_4}{\partial c} - c_2 \frac{\partial c_1}{\partial c} = 0.$$

De algemeene integraal van (1) is dus het resultaat der eliminatie van c uit:

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 F(c) + \{\psi_3(c) + c \psi_2(c)\} x + \psi_4(c),\ y = c x + \psi_1(c), \\ \psi_3'(c) + c \psi_2'(c) - \psi_1'(c) F'(c) = 0,\ \psi_4(c) - \psi_2(c) \psi_1'(c) = 0. \end{array}\right\} . (2).$$

De integraal van (1) is reeds gegeven door DE BOER, loc. cit. pg. 231.

Door te stellen

$$\psi_3 + c \psi_2 = 2 \psi_1' F + \frac{\chi'}{\psi_1''},$$

waarin χ eene nieuwe willekeurige functie is, gaat (2) in de op pag. 233 loc. cit. gevondene oplossing:

$$z = F(c)\{x + \psi_1'(c)\}^2 + \frac{\chi'(c)}{\psi''(c)}\{x + \psi_1'(c)\} - \chi(c), \quad y = cx + \psi_1(c),$$

over.

Zij te integreeren de vergelijking

$$f\,(x, r, s, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Ter bepaling van F volgt uit (C):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m\, \partial x} = 0, \quad \text{of } F(x, m) = \Omega\,(m) + \chi\,(x).$$

De partieele differentiaalvergelijking is dus volgens (A):

$$r + m\,s = 2\,\Omega\,(m) - m\,\Omega'(m) + 2\,\chi\,(x),$$

$$s + mt = \Omega'(m).$$

De integraal er van is:

$$\left.\begin{aligned} z = x^2 F(c) + \{\psi_3(c) + c\,\psi_2(c)\}\,x + \psi_4(c) + 2\int^x \chi\,(x)\,dx, \\ y = c\,x + \psi_1\,(c), \quad \psi_4'(c) = \psi_2\,(c)\,\psi_1'(c), \\ \psi_3'(c) + c\,\psi_2'(c) = \psi_1'(c)\,F'(c). \end{aligned}\right\} (4).$$

Zij te integreeren de vergelijking

$$f\,(z, r, s, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Ter bepaling van F volgt uit (C):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m\, \partial z} = 0 \text{ en } \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Vergelijkingen van den vorm (5) voldoen dus niet aan (C). Zij te integreeren

$$f\,(y, r, s, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Door x en y te verwisselen is deze tot (3) terug te voeren.

Zij te integreeren

$$f(q, r, s, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Ter bepaling van F heeft men volgens (C):

$$\frac{\partial F}{\partial m}\frac{\partial^2 F}{\partial m\,\partial q} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial m^2}\frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Een eerste integraal hiervan is:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \varphi''(q)\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)^2.$$

De integraal hiervan is:

$$F = a m + a^2 \varphi'(q) + \chi(a), \qquad m + 2 a \varphi'(q) + \chi'(a) = 0.$$

De partieele differentiaalvergelijking (A) wordt dus:

$$r + m s = a m + 2 a^2 \varphi'(q) + 2 \chi(a),$$

$$s + m t = a, \quad m + 2 a \varphi'(q) + \chi'(a) = 0,$$

of

$$\left.\begin{aligned} r - m^2 t &= 2 (s + m t)^2 \varphi'(q) + 2 \chi(s + m t), \\ m + 2 (s + m t) \varphi'(q) &+ \chi'(s + m t) = 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8).$$

Het hulpstelsel van (B) is hiervoor:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{p + m q} = \frac{dp}{a m + 2 a^2 \varphi'(q) + 2 \chi(a)} =$$

$$\frac{dq}{a} = \frac{dm}{-2 a^2 \varphi''(q)},$$

waarbij a bepaald wordt uit

$$m + 2 a \varphi'(q) + \chi'(a) = 0.$$

Voeren wij in plaats van m de a als nieuwe onafhan-

$$z = F(c)\{x + \psi_1'(c)\}^2 + \frac{\chi'(c)}{\psi''(c)}\{x + \psi_1'(c)\} - \chi(c), \quad y = cx + \psi_1(c),$$

over.

Zij te integreeren de vergelijking

$$f\ (x, r, s, t) = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3).$$

Ter bepaling van F volgt uit (C):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m\, \partial x} = 0, \quad \text{of } F(x, m) = \Omega\,(m) + \chi\,(x).$$

De partieele differentiaalvergelijking is dus volgens (A):

$$r + m\,s = 2\,\Omega\,(m) - m\,\Omega'\,(m) + 2\,\chi\,(x),$$

$$s + mt = \Omega'\,(m).$$

De integraal er van is:

$$\left.\begin{aligned} z = x^2 F(c) + \{\psi_3(c) + c\,\psi_2(c)\}\,x + \psi_4(c) + 2\int^x \chi\,(x)\,dx, \\ y = c\,x + \psi_1\,(c), \quad \psi_4'\,(c) = \psi_2\,(c)\,\psi_1'\,(c), \\ \psi_3'\,(c) + c\,\psi_2'\,(c) = \psi_1'\,(c)\,F'\,(c). \end{aligned}\right\} (4).$$

Zij te integreeren de vergelijking

$$f\,(z, r, s, t) = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5).$$

Ter bepaling van F volgt uit (C):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m\, \partial z} = 0 \ \text{ en } \ \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Vergelijkingen van den vorm (5) voldoen dus niet aan (C). Zij te integreeren

$$f\ (y, r, s, t) = 0 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6).$$

Door x en y te verwisselen is deze tot (3) terug te voeren.

Zij te integreeren

$$f(q, r, s, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Ter bepaling van F heeft men volgens (C):

$$\frac{\partial F}{\partial m}\frac{\partial^2 F}{\partial m\,\partial q} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial m^2}\frac{\partial F}{\partial q} = 0.$$

Een eerste integraal hiervan is:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \varphi''(q)\left(\frac{\partial F}{\partial m}\right)^2.$$

De integraal hiervan is:

$$F = am + a^2\varphi'(q) + \chi(a), \quad m + 2a\varphi'(q) + \chi'(a) = 0.$$

De partieele differentiaalvergelijking (A) wordt dus:

$$r + ms = am + 2a^2\varphi'(q) + 2\chi(a),$$

$$s + mt = a, \quad m + 2a\varphi'(q) + \chi'(a) = 0,$$

of

$$\left.\begin{array}{l} r - m^2 t = 2(s + mt)^2\varphi'(q) + 2\chi(s + mt), \\ m + 2(s + mt)\varphi'(q) + \chi'(s + mt) = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots (8).$$

Het hulpstelsel van (B) is hiervoor:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{m} = \frac{dz}{p + mq} = \frac{dp}{am + 2a^2\varphi'(q) + 2\chi(a)} =$$

$$\frac{dq}{a} = \frac{dm}{-2a^2\varphi''(q)},$$

waarbij a bepaald wordt uit

$$m + 2a\varphi'(q) + \chi'(a) = 0.$$

Voeren wij in plaats van m de a als nieuwe onafhan-

kelijk veranderlijke in, dan wordt dit hulpstelsel:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2a\varphi'(q) - X'(a)} = \frac{dz}{p - aq\varphi'(q) - q\chi'(a)} =$$

$$\frac{dp}{-a\chi'(a) + 2\chi(a)} = \frac{dq}{a} = \frac{da}{0}.$$

Integralen hiervan zijn:

$$a = c, \quad q = ax + c_1, \quad p = -ax\chi'(a) + 2xX(a) + c_2,$$

$$y = -2\varphi(ax + c_1) - x\chi'(a) + c_3,$$

$$z = x^2\{X(a) - aX'(a)\} + \{c_2 - c_1\chi'(a) - 2a\varphi(ax + c_1)\}x +$$

$$-2c_1\varphi(ax + c_1) + 2a\int\varphi(ax + c_1)\,dx + c_4.$$

Stellen wij c_1, c_2, c_3 en c_4 gelijk aan willekeurige functiën van a, dan hebben wij ter bepaling daarvan

$\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c} = L = 0$. De vergelijking (25) is $\frac{d^2 L}{dx^2} = 0$ of $A + Bx = 0$.

Door invoeging van de waarden voor z, q en y in $L = 0$ komt:

$$(\psi_2' - a\psi_3' - \psi_1'\chi')x + (\psi_4' - \psi_1\psi_3) = 0,$$

zoodat de twee willekeurige functiën bepaald worden door:

$$\psi_2' - a\psi_3' - \psi_1'\chi' = 0 \text{ en } \psi_4' - \psi_1\psi_3' = 0.$$

De integraal van (8) is dus:

$$z = x^2\{\chi(a) - a\chi'(a)\} + \{\psi_2(a) - \psi_1(a)\chi'(a) -$$

$$2a\varphi(ax + \psi_1(a))\}x - 2\psi_1(a)\varphi\{ax + \psi_1(a)\} +$$

$$+ 2a\int\varphi\{ax + \psi_1(a)\}dx + \psi_4(a),$$

$$y = -2\varphi\{ax + \psi_1(a)\} - x\chi'(a) + \psi_3(a),$$

$$\psi_2'(a) - a\psi_3'(a) - \psi_1'(a)\chi'(a) = 0,$$

en

$$\psi_4'(a) - \psi_1(a)\psi_3'(a) = 0.$$

§ 3.

Stellen wij

$$F = -\tfrac{1}{2} R m^2 + m S - \tfrac{1}{2} T,$$

waarbij R, S en T functiën zijn van x, y, z, p en q, dan wordt (A)

$$r + m s = m S - T, \quad s + m t = - m R + S, \ldots (1)$$

waaruit, door eliminatie van m, wordt verkregen:

$$r t - s^2 + R r + 2 S s + T t + R T - S^2 = 0. \ . \ (2).$$

De integratie van deze bekende vergelijking wordt teruggebracht door de methode van MONGE tot het stelsel

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = -T dx + S dy, \quad dq = S dx - R dy, \ . \ (3)$$

waaruit door transformatie de vergelijkingen van BOOLE

$$\left. \begin{aligned} S \frac{\partial u}{\partial p} - R \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial z} q + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ T \frac{\partial u}{\partial p} - S \frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial z} p - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned} \right\} \ldots\ldots (4)$$

kunnen worden verkregen.

Heeft dit stelsel 3 integralen, n. l.

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad u_3 = c,$$

en lost men op naar z, dan komt

$$z = \varphi (x, y, a, b, c).$$

De algemeene integraal wordt dan verkregen door eliminatie van c uit de twee vergelijkingen

$$z = \varphi \{ x, y, c, \psi_1 (c), \psi_2 (c) \}, \quad \frac{d\varphi}{dc} = 0.$$

Door toepassing van de methode van Jacobi op de vergelijkingen van (4) vindt men als voorwaardevergelijkingen voor de bestaanbaarheid der 3 integralen $u = c$ de twee betrekkingen:

$$\Delta_3 S + \Delta_4 T = 0, \quad \Delta_3 R + \Delta_4 S = 0, \quad . \; . \; . \; (5)$$

waarbij men heeft:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} - T\frac{\partial}{\partial p} + S\frac{\partial}{\partial q}, \\ \text{en} \qquad \Delta_4 &= \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + S\frac{\partial}{\partial p} - R\frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (6).$$

Integreeren wij nu (1) volgens de methode, in vorige paragraven ontwikkeld.

De vergelijking (B) § 1 wordt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + (p + mq)\frac{\partial u}{\partial z} + (mS - T)\frac{\partial u}{\partial p} +$$

$$(-mR + S)\frac{\partial u}{\partial q} + 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial m} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (7).$$

De voorwaardevergelijking (C), waaraan F moet voldoen, wordt na eenige herleiding

$$(\Delta_3 S + \Delta_4 T) - m(\Delta_3 R + \Delta_4 S) = 0,$$

waarin Δ_3 en Δ_4 dezelfde beteekenis bezitten als in (6).

Hieraan kan echter niet voldaan zijn, tenzij men afzonderlijk heeft:

$$\Delta_3 S + \Delta_4 T = 0 \text{ en } \Delta_3 R + \Delta_4 S = 0,$$

daar geen dezer beide vormen de m, maar enkel x, y, z, p en q bevatten. Dit zijn echter dezelfde voorwaardevergelijkingen als (5).

De integratie volgens de methode van Boole valt dus geheel onder de hier gegeven integratie.

Vormen we het hulpstelsel van (7):

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{mS-T}=\frac{dq}{-mR+S}=\frac{dm}{2\left(m\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial F}{dq}\right)} \,. \quad (8)$$

De vergelijkingen (3) van MONGE liggen hierin besloten, want door combinatie van de vijf eerste leden verkrijgt men, onafhankelijk van m,

$$\frac{dx}{1}=\frac{Rdy+dq}{S}=\frac{Sdy-dp}{T}=\frac{dz-(pdx+qdy)}{0}$$

of

$$dz=pdx+qdy\,,\ dp=-Tdx+Sdy\,,\ dq=Sdx-Rdy.$$

Integreeren we als toepassing

$$r+ms=m-(p+q)\,,\ s+mt=1-m,\text{*)}$$
$$\text{of}\quad (r+p+q)(t+1)=(1-s)^2.$$

Aan (C) is voldaan.
Het stelsel (8) wordt:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{m-(p+q)}=\frac{dq}{1-m}=\frac{dm}{1-m},$$

en heeft tot integralen:

$$m=1+c_2e^{-x}\,,\quad q=c_2e^{-x}-c_3+a,$$
$$p=-be^{-x}-c_2e^{-x}+c_3-a+1,\ y=x-c_2e^{-x}+c_3,$$
$$z=be^{-x}+x+c-\tfrac{1}{2}(c_2e^{-x}-c_3+a)^2.$$

Stelt men b, c, c_2, en c_3 gelijk aan willekeurige functien van a, dan heeft men ter bepaling daarvan

$$\frac{\partial z}{\partial c}-q\frac{\partial y}{\partial c}=L=0.$$

---

*) Zie over de integratie van deze vergelijking door middel van (4) Imschenetsky, Grünerts Arch 54, Chap. III § 13.

De vergelijking (25) § 1 is hier

$$\frac{d^2L}{dx^2}+\frac{dL}{dx}=0 \text{ of } L=Ae^{-x}+B=0.$$

Door invoeging der waarden van z, q, en y in $L=0$ komt:

$$\left(\frac{db}{da}-c_2\right)e^{-x}+\left(\frac{dc}{da}+c_3-a\right)=0,$$

zoodat de betrekkingen tusschen de willekeurige functien zijn:

$$\frac{db}{da}-c_2=0 \text{ en } \frac{dc}{da}+c_3-a=0.$$

Stellen wij $b=\varphi(a)$ en $c=f(a)$, dan wordt de integraal:

$$z=\varphi(a)+x+f(a)-{}^1/_2\,(x-y+a)^2,$$
$$y=x-\varphi'(a)\,e^{-x}+a-f'(a).$$

De tweede van deze vergelijkingen blijkt de afgeleide van z te zijn ten opzichte van a van de eerste, hetgeen volgens de methode van Boole ook het geval moet zijn, daar

$$z=b\,e^{-x}+x+c-\tfrac{1}{2}(x-y+a)^2$$

eene bijzondere integraal van de gegeven partieele differentiaal vergelijking is.

Zij te integreeren de vergelijking

$$r+ms=z-qy,\quad s+mt=0 \text{ of } (rt-s^2)=(z-qy)\,t.$$

Aan de voorwaarde vergelijking (C) is voldaan.

Het hulpstelsel van (B) wordt:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{m}=\frac{dz}{p+mq}=\frac{dp}{z-qy}=\frac{dq}{0}=\frac{dm}{y}.$$

Integralen verkrijgt men door integratie van

$$\frac{dm + dy}{m + y} = \frac{dx}{1}, \quad \frac{dy - dm}{m - y} = \frac{dx}{1}, \quad dq = 0,$$

dus deze zijn:

$$y + m = 2\, c_1\, e^{x}, \quad y - m = 2\, c_2\, e^{-x}, \quad q = c.$$

Verder heeft men

$$\frac{dp + q\,dm + dz}{p + q\,m + z} = \frac{dp + q\,dm - dz}{-(p + q\,m) + z} = \frac{dx}{1},$$

of

$$p + m\,c + z = 2\, c_3\, e^{x},$$

$$z - (p + m\,c) = 2\, c_4\, e^{-x}.$$

Men heeft dus de integralen

$$z = c_3\, e^{x} + c_4\, e^{-x}, \quad y = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x}, \quad q = c.$$

Stelt men c_1, c_2. c_3 en c_4 gelijk aan willekeurige functiën van c, dan heeft men ter bepaling daarvan de betrekking

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c} = L = 0.$$

De vergelijking (25) § 1 is hier

$$\frac{d^2 L}{d x^2} - L = 0 \text{ of } L = A\, e^{x} + B\, e^{-x} = 0.$$

Door invoeging der waarden voor q, z en y in $L = 0$ komt:

$$(c_3' - c\, c_1')\, e^{x} + (c_4' - c\, c_2')\, e^{-x} = 0,$$

zoodat de betrekkingen tusschen de willekeurige functiën zijn:

$$c_3' - c\, c_1' = 0, \quad c_4' - c\, c_2' = 0$$

of

$$c_3 = c\, c_1 - \int c_1\, dc, \quad c_4 = c\, c_2 - \int c_2\, dc.$$

Stellen wij $c_1 = f'(c)$ en $c_2 = \varphi'(c)$, dan wordt de integraal

$$z = \{ c f'(c) - f(c) \} e^x + \{ c \varphi'(c) - \varphi(c) \} e^{-x},$$

$$y = f'(c) e^x + \varphi'(c) e^{-x},$$

of

$$z = c y - \{ f(c) e^x + \varphi(c) e^{-x} \},$$

$$y = f'(c) e^x + \varphi'(c) e^{-x}.$$

Deze laatste vergelijking is weer de afgeleide ten opzichte van c van de voorgaande, hetgeen het geval moet zijn, daar

$$z = c y + a e^x + b e^{-x}$$

eene particuliere integraal is van de gegevene partieele differentiaalvergelijking.

---

§ 4.

Integreeren wij de vergelijking

$$r + 2 N s + N^2 t + v = 0, \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

waar N en v functien zijn van x, y, z, p en q.

Deze vergelijking is een bijzonder geval van (2) § 3.

Het hulpstelsel volgens de methode van Boole hiervoor is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y} + (p + N q) \frac{\partial u}{\partial z} = v \frac{\partial u}{\partial p}, \quad \ldots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} - N \frac{\partial u}{\partial p} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Zijn

$$f_1(x, y, z, p, q, a) = 0, \quad f_2(x, y, z, p, q, b) = 0$$

en

$$f_3(x, y, z, p, q, c) = 0$$

hiervan de drie integralen, dan kan, zooals wij hebben aan-

getoond, *) de algemeene integraal van (1) niet worden verkregen door eliminatie van p en q uit deze drie integralen en vervolgens door eliminatie van c uit de vergelijkingen

$$z = \varphi\{x, y, c, \chi(c), \varphi(c)\} \text{ en } \frac{d\varphi}{dc} = 0.$$

In de daar ontwikkelde integratie methode kwamen wij tot de volgende stelling:

Is in de vergelijking

$$r + 2Ns + N^2 t + v = 0$$

N een wortel van

$$\varphi(x, y, z, N, p + Nq) = 0 \quad , \ldots \ldots \ldots (4)$$

terwijl v bepaald wordt door de betrekking

$$v \frac{\partial N}{\partial p} = \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq) \frac{\partial N}{\partial z} - F(x, y, z, N) \,, \ldots (5)$$

waarbij φ en F willekeurige functien zijn, dan kan de integratie van (2) en (3) teruggebracht worden tot de partieele differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y} + (p + Nq) \frac{\partial u}{\partial z} + F(x, y, z, N) \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \,, \ldots (6)$$

waarbij voor $(p + Nq)$ de waarde te stellen is uit (4).

Zijn de integralen hiervan

$$f_1(x, y, z, N, c_1) = 0, f_2(x, y, z, N, c_2) = 0, f_3(x, y, z, N, c_3) = 0,$$

dan wordt door eliminatie van N en c uit de vergelijkingen

$$f_1(x, y, z, N, c) = 0,$$
$$f_2\{x, y, z, N, \psi_1(c)\} = 0,$$
$$f_3\{x, y, z, N, \psi_2(c)\} = 0,$$

de algemeene integraal van (1) verkregen.

---

*) SPECKMAN, loc. cit. pg. 35—55.

Bevat de vergelijking (4), die dient ter bepaling van N, de p en q niet, dan gaan de betrekkingen (4) en (5) over in

$$N = \varphi_1(x, y, z), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

$$q\left\{\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z}\right\} = v + F(x, y, z, p + Nq), \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

terwijl (6) alsdan wordt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + N\frac{\partial u}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial z} + F(x, y, z, \mu)\frac{\partial u}{\partial \mu} = 0, \quad . . \quad (9)$$

waarin $p + Nq = \mu$ is gesteld.

De algemeene integraal wordt uit de drie integralen van (9) op dezelfde wijze als uit die van (6) gevonden.

Passen wij nu de in § 1 ontwikkelde integratie methode op (1) toe.

De vergelijkingen, waarvan wij uitgaan, zijn weder die van stelsel (2) § 1.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ of } \Delta_2 u = 0, \quad (10).$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}N^2 - \frac{\partial u}{\partial s}N + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ of } \Delta_1 u = 0 \quad . . \quad (11).$$

De voorwaardevergelijkingen, noodig voor het bestaan van het grootste aantal gemeenschappelijke integralen, (5) en (6) van § 1, worden:

$$\Delta_1 N = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

$$\Delta_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + N\Delta_2 N = 0, \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

$$\Delta_1\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2 N = 0, \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Aan (12) is voldaan, daar N geen r, s of t bevat.

De vergelijkingen (13) en (14) zijn te vervangen door

$$\Delta_1 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \right\} = 0 \; , \; . \; . \; . \; . \; (15).$$

$$\Delta_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \Delta_2 N = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16).$$

De bewerking van (15) uitvoerende, verkrijgen wij:

$$\Delta_1 \Big[2(s+Nt)\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} N + \frac{\partial N}{\partial z}(p+Nq) + \frac{\partial N}{\partial p}(r+Ns) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial q}(s+Nt) \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + N\frac{\partial v}{\partial y} + (p+Nq)\frac{\partial v}{\partial z} + (r+Ns)\frac{\partial v}{\partial p} + \right.$$

$$\left. + (s+Nt)\frac{\partial v}{\partial q} \right\} \Big] = 0.$$

Aan deze voorwaarde is steeds voldaan, daar deze vorm identiek is, onafhankelijk der waarden van v en N.

Er blijft dus over de vergelijking (16) of

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p+Nq)\frac{\partial N}{\partial z} + N\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} - v\frac{\partial N}{\partial p} +$$

$$-(s+Nt)\left(\frac{\partial N}{dq} - N\frac{\partial N}{\partial p}\right) = 0.$$

Aan deze vergelijking kan slechts voldaan zijn als de coefficient van $(s+Nt)$ en het overige afzonderlijk nul zijn, dus:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p+Nq)\frac{\partial N}{\partial z} + N\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} - v\frac{\partial N}{\partial p} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial q} - N\frac{\partial N}{\partial p} = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

Integratie van (18) levert ons

$$\varphi(x, y, z, N, p + Nq) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19).$$

Integratie van (17), in verband met (18), geeft:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z} - v\frac{\partial N}{\partial p} = F(x, y, z, N). \quad (20).$$

De vergelijkingen (19) en (20) zijn echter dezelfde als (4) en (5).

Wij hebben dus de volgende stelling:

De integratie van de partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde, lineair in de hoogste afgeleiden, alsmede die van AMPÈRE, is, uitgaande èn van het stelsel van MONGE èn van het stelsel van DARBOUX, afhankelijk van dezelfde voorwaardevergelijkingen, als de karakteristieke vergelijking twee gelijke wortels bezit en de hulpstelsels het grootste aantal gemeenschappelijke integralen bezitten. Wij zullen nu aantoonen, dat wij in beide gevallen ook hetzelfde hulpstelsel verkrijgen.

Vermenigvuldigen wij (11) met een onbepaalden factor λ, tellen ze bij (10) op, vormen het stelsel van LA GRANGE en elimineeren wij λ, dan komt:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{N} = \frac{dz}{p+Nq} = \frac{dp}{r+Ns} = \frac{dq}{s+Nt} = \frac{dr + ds}{-2(s+Nt)\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)} =$$

$$\frac{ds + N\,dt}{-2(s+Nt)\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{dr + 2\,N\,ds + N^2\,dt}{-2(s+Nt)\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right\} - \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}} \cdot (21$$

Maar uit $r + 2\,Ns + N^2 t + v = 0$ volgt:

$$dr + 2\,N\,ds + N^2\,dt = -2\,(s + Nt)\,dN - dv,$$

waardoor (21) overgaat in:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{N} = \frac{dz}{p + Nq} = \frac{dp}{r + Ns} = \frac{dq}{s + Nt} =$$

$$= \frac{2\,(s + Nt)\,dN + dv}{2\,(s + Nt)\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\}} \cdot (22).$$

Door combinatie kunnen wij hieraan als nieuw lid toevoegen:

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz+\frac{\partial v}{\partial p}dp+\frac{\partial v}{\partial q}dq}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}=$$

$$=\frac{dv}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)},$$

zoodat (22), in verband met (17) en (18), overgaat in:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{N}=\frac{dz}{p+Nq}=\frac{dN}{F(x,\ y,\ z,\ N)}$$

of

$$\frac{\partial u}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial y}+(p+Nq)\frac{\partial u}{\partial z}+F(x,\ y,\ z,\ N)\frac{\partial u}{\partial N}=0, \quad (23)$$

hetgeen weder (6) is.

Zijn de integralen van (23)

$$f_1(x,\ y,\ z,\ N,\ c_1)=0, \qquad f_2(x,\ y,\ z,\ N,\ c_2)=0,$$

$$f_3(x,\ y,\ z,\ N,\ c_3)=0,$$

dan zullen ook nog integralen zijn

$$c_2=\psi_1(c_1) \text{ en } c_3=\psi_2(c_1), \ldots\ldots \quad (24)$$

waarbij de functiën ψ willekeurige functiën zijn, en, daar de algemeene integraal van (1) er twéé heeft, zullen ze onafhankelijk van elkaar zijn. Maar dan is elke combinatie van (24) een integraal van (1), zoodat, door eliminatie van N uit (24) de algemeene integraal van (1) wordt verkregen.

---

§ 5.

Bewijzen wij nu het omgekeerde van het hier boven bewezene:

Door eliminatie van c uit de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} f_1\{x,\ y,\ z,\ c,\ \psi(c),\ \chi(c)\} = 0, \\ f_2\{x,\ y,\ z,\ c,\ \chi(c),\ \psi(c)\} = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (1)$$

ontstaat eene partieele differentiaalvergelijking van den vorm

$$r + 2Ns + N^2 t + v = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

waarbij N en v voldoen aan de betrekkingen

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial N}{\partial y} + (p + Nq)\frac{\partial N}{\partial z} + N\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} - v\frac{\partial N}{\partial p} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial q} - N\frac{\partial N}{\partial p} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Deze vergelijking kan volgens de boven ontwikkelde methode weer geintegreerd worden.

Differentieeren wij de vergelijkingen (1) naar x en naar y totaal, dan komt:

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dc}\frac{dc}{dx} = 0, \quad \frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dc}\frac{dc}{dx} = 0,$$

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dc}\frac{dc}{dy} = 0, \quad \frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dc}\frac{dc}{dy} = 0,$$

waarin wij hebben gesteld

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}p \ \text{ en } \ \frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q.$$

Door eliminatie van $\frac{df_1}{dc}$, $\frac{df_2}{dc}$, $\frac{dc}{dx}$ en $\frac{dc}{dy}$ uit deze vier ver-

gelijkingen, die homogeen in de te elimineeren grootheden zijn, volgt:

$$\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{df_2}{dx}\frac{df_1}{dy} = 0 \text{ of } F = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (5).$$

Deze vergelijking is van den vorm

$$F\{x, y, z, p, q, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0.$$

Evenals nu uit de vergelijkingen (1) vergelijking (5) is gevormd, verkrijgt men uit een der vergelijkingen van (1) en uit (5) de nieuwe vergelijkingen

$$\frac{dF}{dx}\frac{df_1}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{df_1}{dx} = 0 \; (6a), \quad \frac{dF}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{df_2}{dx} = \; (6b).$$

Deze vergelijkingen zijn van den vorm

$$\varphi\{x, y, z, p, q, r, s, t, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0. \;.\;.\;.\; (6).$$

Elimineeren wij nu uit de vergelijkingen (1), (5) en (6) of uit

$$f_1\{x, y, z, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0,$$
$$f_2\{x, y, z, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0,$$
$$F\{x, y, z, p, q, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0,$$
$$\varphi\{x, y, z, p, q, r, s, t, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0,$$

de grootheden c, $\chi(c)$ en $\psi(c)$,

dan ontstaat eene partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde.

Schrijven wij

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}p + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}p^2 = \frac{d^2 f}{dx^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}p + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}q + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}pq = \frac{d^2 f}{dx\,dy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}q+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}q^2=\frac{d^2 f}{dy^2},$$

dan verkrijgen wij door ontwikkeling van (6*a*):

$$\left\{\frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dy}r-2\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy}s+\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dx}t\right\}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}\right)+$$

$$+\frac{df_2}{dy}\left\{\frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dy}\frac{d^2 f_1}{dx^2}-2\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy}\frac{d^2 f_1}{dx\,dy}+\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dx}\frac{d^2 f_1}{dy^2}\right\}+$$

$$-\frac{df_2}{dy}\left\{\left(\frac{df_1}{dy}\right)^2\frac{d^2 f_2}{dx^2}-2\frac{df_1}{dy}\frac{df_1}{dx}\frac{d^2 f_2}{dx\,dy}+\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2\frac{d^2 f_2}{dy^2}\right\}=0. \quad (7).$$

Stelt men ter bekorting $-\dfrac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{df}{dy}}=N$, waarin wegens (5) f zoowel f_1 als f_2 kan zijn, dan gaat (7) over in:

$$\frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dy}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}\right)(r+2Ns+N^2t)+$$

$$+\frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dy}\left\{\frac{df_2}{dy}\left(\frac{d^2 f_1}{dx^2}+2N\frac{d^2 f_1}{dx\,dy}+N^2\frac{d_2 f_1}{dy^2}\right)+\right.$$

$$\left.-\frac{df_1}{dy}\left(\frac{d^2 f_2}{dx^2}+2N\frac{d^2 f_2}{dx\,dy}+N^2\frac{d^2 f_2}{dy^2}\right)\right\}=0.$$

Stelt men

$$\frac{d^2}{dx^2}+2N\frac{d^2}{dx\,dy}+N^2\frac{d^2}{dy^2}=\Delta,$$

dan gaat bovenstaande vergelijking over in:

$$r+2Ns+Nt+\frac{\dfrac{df_2}{dy}\Delta f_1-\dfrac{df_1}{dy}\Delta f_2}{\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\dfrac{df_2}{dy}-\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{df_1}{dy}}=0\ldots \quad (8).$$

Elimineeren wij dus c, $\psi(c)$ en $\chi(c)$ uit deze vergelijking en uit:

$$f_1\{x, y, z, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0, \quad \ldots\ldots (9)$$

$$f_2\{x, y, z, c, \psi(c), \chi(c)\} = 0, \quad \ldots\ldots (10)$$

en

$$\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dy} - \frac{df_2}{dx}\frac{df_1}{dy} = 0, \quad \ldots\ldots (11)$$

dan verkrijgen wij de gezochte partieele differentiaalvergelijking.

Bewijzen wij nu dat deze alsdan voldoet aan (3) en (4).

Denken wij ons $\psi(c)$ en $\chi(c)$ opgelost uit (9) en (10), de waarden daarvoor gesubstitueerd in (8) en (11), dan moet hieruit enkel nog c geëlimineerd worden. Noemen wij deze twee laatste vergelijkingen alsdan (8a) en (11a).

Uit (11a) volgt:

$$N\frac{\partial c}{\partial p} - \frac{\partial c}{\partial q} = 0, \quad \ldots\ldots (12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\dfrac{df_2}{dy}\dfrac{\partial f_1}{\partial z} - \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\dfrac{df_1}{dy}}{\dfrac{df_1}{dy}\left(\dfrac{d^2 f_2}{dc\,dx} + N\dfrac{d^2 f_2}{dc\,dy}\right) - \dfrac{df_2}{dy}\left(\dfrac{d^2 f_1}{dc\,dx} + N\dfrac{d^2 f_1}{dc\,dy}\right)}, \quad (13)$$

$$\frac{dc}{dx} + N\frac{dc}{dy} = -\frac{\dfrac{df_2}{dy}\Delta f_1 - \dfrac{df_1}{dy}\Delta f_2}{\dfrac{df_2}{dy}\left(\dfrac{d^2 f_1}{dc\,dx} + N\dfrac{d^2 f_1}{dc\,dy}\right) - \dfrac{df_1}{dy}\left(\dfrac{d^2 f_2}{dc\,dx} + N\dfrac{d^2 f_2}{dc\,dy}\right)} \quad (14).$$

Nu was

$$N = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}p}{\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}q},$$

waaruit volgt dat, in verband met (12),

$$N\frac{dN}{dp} - \frac{dN}{dq} = 0$$

is, en dus is voldaan aan (4).

Verder is:

$$\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dy} = -\frac{\Delta f}{\frac{df}{dy}} +$$

$$+\frac{\left(\frac{d^2 f}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f}{dc\,dy}\right)\left(\frac{df_2}{dy}\Delta f_1 - \frac{df_1}{dy}\Delta f_2\right)}{\frac{df}{dy}\left[\frac{df_2}{dy}\left(\frac{d^2 f_1}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_1}{dc\,dy}\right) - \frac{df_1}{dy}\left(\frac{d^2 f_2}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_2}{dc\,dy}\right)\right]}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial N}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{df}{dy}} - \frac{\left(\frac{d^2 f}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f}{dc\,dy}\right)\left(\frac{df_2}{dy}\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{df_1}{dy}\frac{df_2}{dz}\right)}{\frac{df}{dy}\left[\frac{df_1}{dy}\left(\frac{d^2 f_2}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_2}{dc\,dy}\right) - \frac{df_2}{dy}\left(\frac{d^2 f_1}{dc\,dx} + N\frac{d^2 f_1}{dc\,dy}\right)\right]}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial q} = \frac{\frac{df_2}{dy}\frac{\partial \Delta f_1}{\partial q} - \frac{df_1}{dy}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial q}}{\frac{df_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}} + \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z}\Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Delta f_2}{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial q}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{\frac{df_2}{dy}\frac{\partial \Delta f_1}{\partial p} - \frac{df_1}{dy}\frac{\partial \Delta f_2}{\partial p}}{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}} - \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z}\Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Delta f_2}{N\left\{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}\right\}} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial p}. \quad (18)$$

Voorts heeft men

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial p} = 2\frac{d^2 f}{dx\,dy}\frac{\partial N}{\partial p} + 2N\frac{d^2 f}{dy^2}\frac{\partial N}{\partial p} + \frac{\partial\, d^2 f}{\partial p\, dx^2} + 2N\frac{\partial d^2 f}{\partial p\, dx\, dy} + N^2\frac{\partial d^2 f}{\partial p\, dy^2}$$

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial q} = 2\frac{d^2 f}{dx\,dy}\frac{\partial N}{\partial q} + 2N\frac{d^2 f}{dy^2}\frac{\partial N}{\partial q} + \frac{\partial d^2 f}{\partial q\, dx^2} + 2N\frac{\partial d^2 f}{\partial q\, dx\, dy} + N^2\frac{\partial\, d^2 f}{\partial q\, dy^2}$$

en dus $\frac{\partial \Delta f}{\partial q} - N\frac{\partial \Delta f}{\partial p} = 0.$

De voorwaardevergelijking (3) is

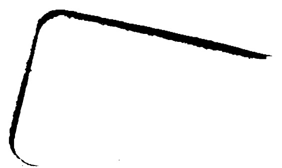
$$\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dy} - v\frac{dN}{dp} - \frac{\partial v}{\partial q} + N\frac{\partial v}{\partial p} = 0.$$

Substitueert men hierin de waarden uit (15), (16), (17) en (18), dan komt, in verband met (12),

$$-\frac{\Delta f}{\frac{df}{dy}} - 2\frac{\frac{\partial f_2}{\partial z}\Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Delta f_2}{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}} + v\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{df}{dy}} =$$

$$= -\frac{\Delta f}{\frac{df}{dy}} - \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z}\Delta f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Delta f_2}{\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{df_2}{dy} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{df_1}{dy}} = 0.$$

Aan (3) is dus voldaan, waarmede het gestelde beweren is.




Widener Library
3 2044 092 715 077